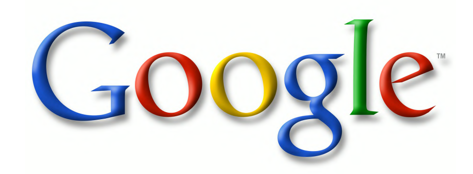
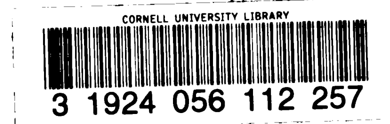








Verhandlungen
der
Deutschen Physikalischen Gesellschaft

im Jahre 1918

Zwanzigster Jahrgang

Im Auftrage der Gesellschaft herausgegeben
von
Karl Scheel



Braunschweig
Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn
1918

Inhalt[1].

[1]) An den durch die fettgedruckten Seitenzahlen bezeichneten Stellen finden sich ausführlichere Mitteilungen über den betreffenden Gegenstand.

Verhandlungen
der
Deutschen Physikalischen Gesellschaft

Im Auftrage der Gesellschaft herausgegeben
von
Karl Scheel

20. Jahrg. **28. Februar 1918.** **Nr. 1/4.**

Sitzung vom 11. Januar 1918.

Vorsitzender: Hr. Karl Scheel.

Hr. **H. Rubens** berichtet

über den Brechungsexponenten einiger fester Körper für kurze elektrische Wellen.

Ferner spricht Hr. **E. Madelung**

über die Präzessionsbewegung des Wasserstoffmoleküls.

Zur Veröffentlichung in den „Verhandlungen" der Gesellschaft sind Mitteilungen eingegangen von den Herren

Franz Tank: Nachwirkungsstrom und dielektrischer Wechselstromverlust, Bemerkung zur Arbeit des Herrn Ulfilas Meyer „Zur Theorie der elektrischen Nachwirkung".

Sven Em. Ohlon: Das positive Ion als Träger der Lichtemission bei Kanalstrahlenfluoreszenz anorganischer Salze.



Sitzung vom 25. Januar 1918.

Die Sitzung fällt aus.

Als Mitglieder wurden in die Gesellschaft aufgenommen:

Hr. Dr. Robert Naumann, Berlin-Schlachtensee, Heimstättenstr. 4.
(Vorgeschlagen durch Hrn. H. Beckmann.)

Hr. Vladimir Vrkljan, Supplent a. d. kgl. Handelsakademie in Zagreb (Kroatien), Mesnička-Gasse 5.
(Vorgeschlagen durch Hrn. E. Jahnke.)

Hr. Dr. Rudolf Ewald, Charlottenburg 2, Uhlandstr. 193, Ghs. pt. (z. Z. d. Ingenieur-Komitee zugeteilt).
(Vorgeschlagen durch Hrn. J. Eggert.)

Hr. Dr. Reinhold Fürth, Prag II, Poříč 14.
(Vorgeschlagen durch Hrn. Karl Scheel.)

Hr. Korvetten-Kapitän Betz, Gesellschaft für drahtlose Telegraphie, Berlin SW. 61, Tempelhofer-Ufer 9.
(Vorgeschlagen durch Hrn. M. Born.)

Sitzung vom 8. Februar 1918.

Vorsitzender: Hr. H. Rubens.

Hr. E. **Grüneisen** spricht über

1. die Elektrizitätsleitung der Metalle bei tiefer Temperatur,
2. die Beziehungen des elektrischen Leitvermögens zum periodischen System der Elemente.

Zur Veröffentlichung in den „Verhandlungen“ der Gesellschaft ist eine Mitteilung eingegangen von Hrn. **M. Born:**

Über die Zerstreuung des Lichtes in H_2, O_2 und N_2.

Nachwirkungsstrom und dielektrischer Wechselstromverlust.

Bemerkung zur Arbeit des Herrn Ulfilas Meyer „Zur Theorie der dielektrischen Nachwirkung“ [1])

von Franz Tank.

(Eingegangen am 3. Januar 1918.)

Daß Nachwirkungsstrom und dielektrischer Wechselstromverlust quantitativ zusammenhängen, wird wohl allgemein als Tatsache angenommen. Nach E. v. SCHWEIDLER [2]) gilt die Beziehung

$$\sin \delta = \int_0^\infty \varphi(t) \sin(\omega t)\, dt,$$

wenn δ den Verlustwinkel, $\omega = 2\pi n$ (n = Periodenzahl) die Frequenz des Wechselstromes und $\varphi(t)$ die Nachwirkungsfunktion bedeuten. Letztere bestimmt im wesentlichen den zeitlichen Verlauf des Nachwirkungsstromes. Der Nachwirkungsstrom ist für einen Kondensator von der Kapazität C bei einer angelegten Gleichspannung E:

$$i = E\, C\, \varphi(t).$$

Die v. SCHWEIDLERsche Formel ist sehr allgemein, da sie nur die Gültigkeit des sog. Superpositionsgesetzes zur Voraussetzung hat. Ihre experimentelle Nachprüfung ist insofern von Wichtigkeit, als dadurch entschieden werden kann, ob der Wechselstromverlust lediglich von dielektrischer Nachwirkung herrührt, oder ob noch andere Ursachen vorhanden sind. Hier ergibt sich nun die Schwierigkeit, daß es nie möglich ist, den Nachwirkungsstrom wirklich vom Zeitwert Null an zu messen; ein Intervall von $t = 0$ bis $t = t_1$ bleibt unbeobachtet. Demgemäß zerfällt der Ausdruck für den Verlustwinkel in zwei Teile:

$$\sin \delta = \int_0^{t_1} \varphi(t) \sin(\omega t)\, dt + \int_{t_1}^\infty \varphi(t) \sin(\omega t)\, dt.$$

---

[1]) ULFILAS MEYER, Verh. d. D. Phys. Ges. **19**, 139, 1917.

[2]) E. v. SCHWEIDLER, Ann. d. Phys. (4) **24**, 722, 1907.

Nur dann kann aus Messungen über den Verlauf des Nachwirkungsstromes ein zuverlässiger Schluß auf den Verlust gezogen werden, wenn das erste Integral klein ist gegen das zweite. In seiner Arbeit „Zur Theorie der dielektrischen Nachwirkung" äußert sich Herr Ulfilas Meyer [1]) über die Bedingungen, die hierfür nötig sind. Seine Ausführungen dürften nicht unbedingt stichhaltig sein und sind mir Anlaß zu den folgenden Bemerkungen.

Es sei der Nachwirkungsstrom bzw. die Nachwirkungsfunktion $\varphi(t)$ von der Zeit t_1 an experimentell ermittelt. Man will wissen, ob t_1 hinreichend klein ist, daß der Verlustwinkel für Wechselstrom einer bestimmten Frequenz ω ohne wesentliche Fehler berechnet werden kann. Zur Diskussion dieser Frage habe ich ein graphisches Verfahren bequem und für fast alle Fälle hinreichend befunden. Wir stellen das Integral

$$\sin\delta = \int_0^\infty \varphi(t)\sin(\omega t)\,dt$$

als Fläche dar, indem die Zeit als Abszisse und $y = \varphi(t)\sin\omega t$ als Ordinate gewählt wird. Letzterer Ausdruck muß für $t = 0$ verschwinden, weil unendlich starke Ströme physikalisch nicht möglich sind. Es bleibt also ein Stück OP, entsprechend dem Zeitintervall von $t = 0$ bis $t = t_1$, zu extrapolieren. Die Sicherheit oder Unsicherheit dieser Extrapolation ergibt sich meist unmittelbar aus der graphischen Darstellung.

Als typischer Fall sei das Beispiel eines Papierkondensators [2]) angeführt. Die Beobachtungen über den zeitlichen Verlauf des Nachwirkungsstromes sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 1.

$E = 104{,}2$ V. $C = 0{,}001\,158$ MF.

t sek	$i \times 10^7 A$	t sek	$i \times 10^7 A$	t sek	$i \times 10^7 A$
0,000 820	16,60	0,007 02	3,06	0,058 70	0,574
0,001 804	8,79	0,011 72	2,05	0,082 5	0,439
0,002 788	6,40	0,018 77	1,409	0,119 3	0,328
0,003 722	5,00	0,035 21	0,856	0,185 2	0,229

1) Ulfilas Meyer, l. c.

2) Franz Tank, Ann. d. Phys. (4) 48, 307, 1915 (Kondensator „A").

Die Figuren 1, 2 und 3 zeigen das Integral

$$\int_{t_1}^{\infty} i \sin(\omega t)\, dt$$

für Wechselstrom der Periodenzahlen 15, 50 und 500. Der Bequemlichkeit halber ist statt der Nachwirkungsfunktion $\varphi(t)$ der ihr proportionale Nachwirkungsstrom i unter das Integral gesetzt;

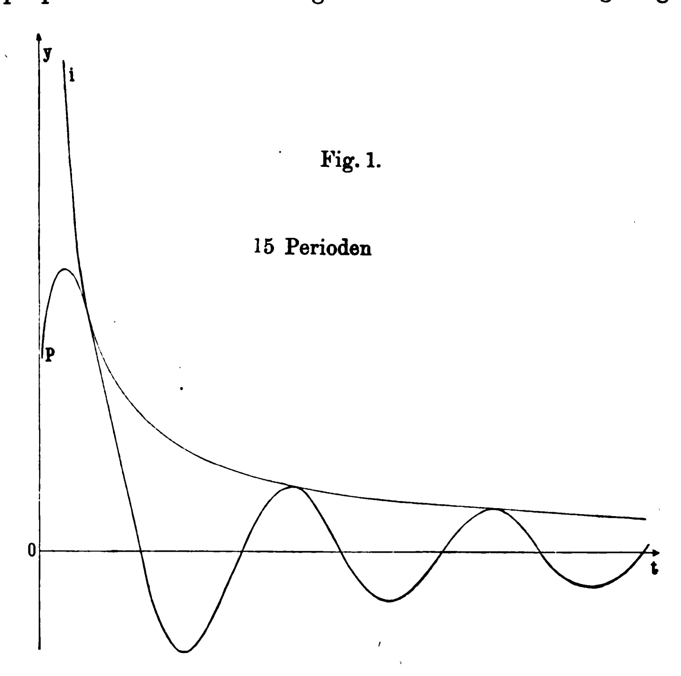


Fig. 1.

15 Perioden

der Nachwirkungsstrom selbst ist jeweils auch noch eingezeichnet. Die Zeit t_1 beträgt 0,000 82 sek.

Man erkennt unmittelbar, daß im Falle der Fig. 1 und 2 das fehlende Kurvenstück OP kaum unsicher extrapoliert werden kann. Anders in Fig. 3. Hier herrscht über den weiteren Verlauf der Kurve von P bis O Unbestimmtheit; die Verhältnisse hängen ganz von den besonderen Eigenschaften der Nachwirkungsfunktion ab. Die zulässige Grenze der Frequenz, für die der Verlust noch einigermaßen sicher ermittelt werden kann, dürfte in unserem Fall zwischen 50 und 100 Perioden liegen; über Verluste bei höheren Frequenzen läßt sich aus den Beobachtungen nichts aussagen.

Es ist allerdings möglich, daß gerade für sehr kleine Zeiten der Nachwirkungsstrom ein Verhalten zeigt, das von dem Verhalten innerhalb beobachtbarer Zeiten starke Abweichungen zeigt, und es wäre denkbar, daß innerhalb des extrapolierten Stückes OP ein, wenn auch schmales, doch so hohes Maximum auftreten würde, daß der Wert des Verlustwinkels merklich geändert würde. Bei einer großen Zahl von Dielektriken ist dies schwerlich der Fall. Eine Reihe häufig verwendeter Dielektriken wie Isolier-

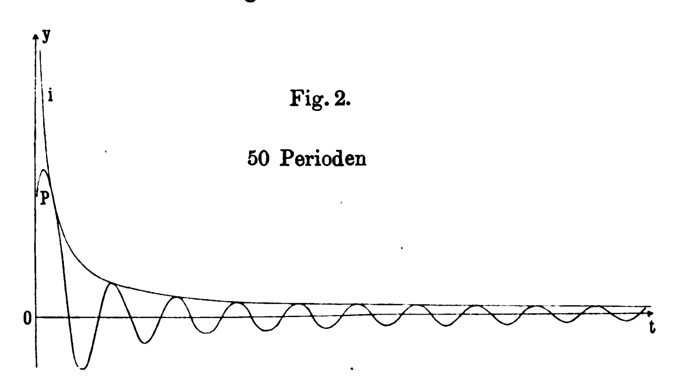


Fig. 2.

papiere, Glas usw. besitzt nämlich eine Nachwirkungsfunktion, die in weiten Grenzen in erster Näherung dem Gesetz gehorcht

$$\varphi(t) = \beta . t^{-n}.$$

n und β sind Materialkonstanten, und zwar liegt der Wert von n stets zwischen 0 und 1. Es folgt daraus für den Verlustwinkel[1])

$$\sin\delta = \omega^{n-1} \cdot \beta \cdot \frac{\pi}{2\,\Gamma(n)\cos\frac{(1-n)\,\pi}{2}}$$

und für den Effektverlust

$$Q = \omega^n C E^2 \cdot \beta \cdot \frac{\pi}{2\,\Gamma(n)\cos\frac{(1-n)\,\pi}{2}},$$

also mit zunehmender Frequenz abnehmender Verlustwinkel und zunehmender Effektverlust. Aus Messungen über die Abhängigkeit des Verlustwinkels von der Frequenz folgen in diesen Fällen regelmäßig Werte von n, die mit den Werten von n, wie sie aus dem Verlauf des Nachwirkungsstromes folgen, ziemlich überein-

---

1) E. v. Schweidler, l. c.

stimmen. So findet JORDAN[1]) für Papierkondensatoren n nahezu gleich 1 und bis zu Frequenzen $\omega = 10000$ praktisch Unabhängigkeit des Verlustwinkels von der Frequenz. Aus Wechselstrommessungen von K. W. WAGNER[2]) bis $\omega = 40000$ entnehme ich ebenfalls für Papierkondensatoren $n = 0{,}6$, während meine[3]) statischen Beobachtungen im Mittel ergeben $n = 0{,}75$. Diese Beispiele lassen sich leicht vermehren. Es folgt daraus ein sehr weiter Gültigkeitsbereich der Näherungsformel $\varphi(t) = \beta t^{-n}$.

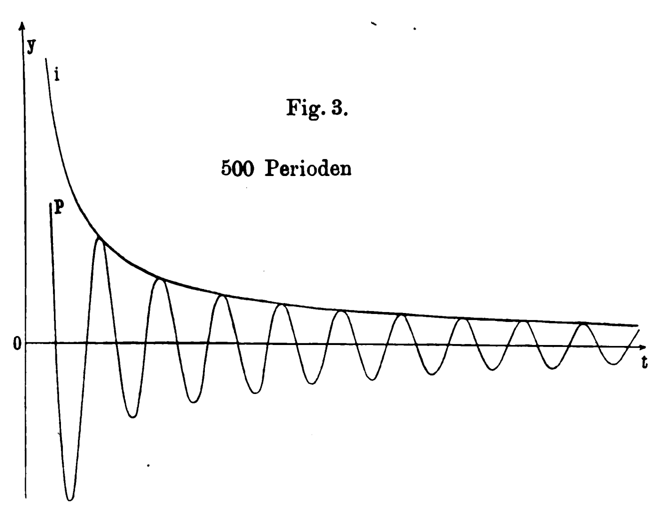


Fig. 3.

Sollte für noch kleinere Zeiten, als der Periodendauer der genannten Wechselströme entspricht, ein unregelmäßiges Verhalten des Nachwirkungsstromes eintreten, so bleibt dies ohne Einfluß auf den Verlust bei langsamem Wechselstrom; denn dann ist für die kritischen Werte $\sin \omega t$ so klein, daß $\varphi(t) . \sin \omega t$ unter allen Umständen klein bleibt.

Ich habe mich bei diesen Ausführungen mit Absicht auf möglichst wenig Überlegungen theoretischer Art gestützt. Bekanntlich hat K. W. WAGNER[4]) eine Theorie der unvollkommenen Dielektriken gegeben, die alle Beobachtungen wiederzugeben imstande ist. Nach ihr entsprechen die soeben behandelten Fälle

---

[1]) H. JORDAN, Verh. d. D. Phys. Ges. **14**, 451, 1912.
[2]) K. W. WAGNER, Archiv für Elektrotechnik **3**, 100, 1914.
[3]) F. TANK, Ann. d. Phys. (4) **48**, 307, 1915.
[4]) K. W. WAGNER, Ann. d. Phys. (4) **40**, 817, 1913.

Dielektriken, die über weite Gebiete ziemlich gleichmäßig verteilte Zeitkonstanten besitzen. Für den Verlust bei einer bestimmten Frequenz sind dann vor allem die Glieder der WAGNERschen Formel maßgebend, deren Zeitkonstanten dem reziproken Wert der Frequenz am nächsten liegen, während Glieder, deren Zeitkonstanten um das Hundertfache davon abweichen, sich nicht mehr merklich geltend machen. Wie aus den Fig. 1 bis 3 ersichtlich ist, kommen namentlich auch Werte der Nachwirkungsfunktion in Betracht, die Zeitwerten von Vielfachen der Periodendauer entsprechen.

Die Fälle, wo eine ausgesprochene Gruppierung der Zeitkonstanten um einen mittleren Wert stattfindet, zeigen ein starkes Maximum des Verlustwinkels in Abhängigkeit von der Frequenz. Inwiefern die Nachwirkungsglieder, die einem solchen Maximum entsprechen, innerhalb eines größeren Bereiches für den Nachwirkungsstrom und Wechselstromverlust bestimmend sind, muß in jedem Fall gesondert untersucht werden. Ein Verfahren, wie das hier entwickelte, dürfte sich auch da als zweckmäßig erweisen.

Zürich, Physik. Institut der Universität, Dezember 1917.

Das positive Ion als Träger der Lichtemission bei Kanalstrahlenfluoreszenz anorganischer Salze; von Sven Em. Ohlon.

(Eingegangen am 10. Januar 1918.)

Vor einigen Jahren war es mir gelungen, unter Benutzung eines in der Bewegungsrichtung der Kathodenstrahlen wirkenden Magnetfeldes Kathodenstrahlen in scharf markierten Punkten auf anorganische Salze der Alkalimetalle und mehrere schwere Metalle zu konzentrieren und dadurch die verschiedenen Metalle zur Emission ihrer Serienlinien zu bringen [1]). Die Energie der Kathodenstrahlen, bei welcher die Serienemission eines Metalles eintritt, variiert stark mit den verschiedenen Salzen des Metalles und ist um so größer, je größer die Bildungswärme des Salzes ist. Wenn ich also zwischen der fraglichen Kathodenstrahlenenergie für eine Serie Salze des gleichen Metalles einerseits und der auf ein Grammatom des Metalles berechneten Bildungswärme der betreffenden Salze andererseits einen Vergleich in Diagrammen (s. Abhandlung) anstellte, erhielt ich für jede durch die Untersuchung beabsichtigte hervortretende Spektrallinie eine gerade Linie im Diagramm. Die einem Metallgrammatom entsprechende Bildungswärme erhielt ich, indem ich die Bildungswärme des Grammoleküls durch die Metallatomzahl im Molekül dividierte.

Ferner stellte ich fest, daß der fragliche Schwellenwert der Energie abnimmt, wenn das Entladungspotential, d. h. die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen, zunimmt.

Bei der Temperatur der flüssigen Luft konnte ich keine Serienemission bei Salzen unter dem Stoß der Kathodenstrahlen entdecken, obgleich die angestellten Versuche dieselben waren. Dahingegen trat bei den niedrigen Temperaturen oft eine verstärkte kontinuierliche Lumineszenz von großer Stärke und Schönheit zutage.

Der durchgreifenden Rolle nach zu urteilen, die somit die Bildungswärme der Salze bei diesen Prozessen spielt, müssen sich

---

[1]) S. E. Ohlon, Diss. Upsala 1914.

die Salze unter dem Einfluß der Kathodenstrahlen in ihre positiven und negativen Komponenten erst dissoziieren, ehe Lichtemission in den Spektrallinien des Metalles zum Vorschein kommt. Aus der Notwendigkeit der Dissoziation der Salze erklärt sich ohne weiteres das Verhältnis bei der Temperatur der flüssigen Luft, bei der ja jede Linienlumineszenz aufhörte. Für diese Erklärung spricht auch das Auftreten der für das Metall charakteristischen Nachfarben, sobald die Salze zur Serienemission angeregt werden. Diese Nachfarben stimmen vorzüglich mit den Farben der kolloiden Flüssigkeitslösungen bei denselben Metallen überein.

Die vorher von J. Stark und G. Wendt[1]) u. a. untersuchte Serienemission von Alkalimetallsalzen und Salzen der alkalischen Erden unter dem Stoße der Kanalstrahlen sind unter Benutzung niedrigerer Stromstärke, als genannte Forscher sich deren bedienten, einer neuen Prüfung unterzogen worden. Ebenso habe ich unter den gleichen Versuchsbedingungen Serienemission bei den Salzen einer Anzahl schwerer Metalle mittels Kanalstrahlenerregung erzielt.

Die von Stark und Wendt gezogene Schlußfolgerung, daß die Serienemission bei dem Stoß der Kanalstrahlen erst oberhalb bestimmter Schwellenwerte des Entladungspotentials eintritt, hat sich bestätigt. Dagegen hat sich die Annahme dieser Forscher, daß obige Schwellenwerte von der Stromstärke im Entladungsrohr und für ein gewisses Metall von der chemischen Verbindung unabhängig sein sollen, nicht in allen Teilen als richtig erwiesen. Die bei veränderter Stromstärke oder bei Auswechslung der chemischen Verbindung in einem gewissen Metall eintretende Schwankung des Schwellenwertes ist jedoch im Vergleich zu dem bei Kathodenstrahlen herrschenden Zustand äußerst gering. Der Schwellenwert des Entladungspotentials erhöht sich ein wenig mit der für die Metallsalze gültigen Bildungswärme. Auch bei verminderter Stromstärke macht sich diese Erhöhung des Entladungspotentials schwach bemerkbar. Die unbedeutenden Abweichungen zwischen meinen und Starks und Wendts Resultaten finden ihre Erklärung möglicherweise in dem Umstand, daß wir innerhalb verschiedener Stromstärkeintervalle arbeiteten.

---

[1]) J. Stark und G. Wendt, Ann. d. Phys. (4) 38, 669, 1912.

Während die von mir benutzten Stromstärken von 0,11 bis 0,62 mA variierten, sind die Stromstärken, mit denen STARK und WENDT arbeiteten, nie unter 1 mA gesunken und stiegen bis zu 15 mA an [1]).

Zum Schluß meiner Abhandlung wies ich darauf hin, daß bei Verwendung von Kanalstrahlen zwischen diesen und den bombardierten Salzen oft chemische Reaktionen eintreten. Dieser Umstand, sowie die verschiedene Größenordnung der Massen der stoßenden Teilchen in Kathoden- und Kanalstrahlen mußten als Erklärung dienen für die quantitativ ungleiche Wirkung, die diese beiden Strahlenarten in bezug auf Lumineszenz an den Tag legen.

Wie eben hervorgehoben, spielt die Bildungswärme bei der Lumineszenzwirkung der Kathodenstrahlen die Rolle, auf eine Dissoziation der Moleküle vor Eintritt der Lichtemission aufmerksam zu machen. Das positive Metallion würde also in diesem Falle der Träger der Serienemission sein. Zufolge der unwichtigen Rolle aber, die die Bildungswärme der Salze bei Benutzung von Kanalstrahlen spielt, wäre es vielleicht gewagt, hier dieselbe Behauptung aufzustellen. Wenn man aber davon ausgeht, daß die Fluoreszenzwirkung der Kathoden- und Kanalstrahlen sonst übereinstimmt, könnte man sich vielleicht der Ansicht anschließen, daß auch bei Kanalstrahlen die positiven Ionen die Träger der Serienemission sind. Diese Ansicht haben STARK und WENDT [2]) schon früher vertreten. Durch Versuche gelang es ihnen zu zeigen, daß die lichtemittierende Schicht beim Stoß der Kanalstrahlen sich im Takt mit einem gerade durch die Schicht wirkenden elektrischen Feld verändert. Diese Veränderung geschieht in der Weise, wie es eine positive Ladung bei den strahlenden Teilchen verlangen würde.

Um noch deutlicher vor Augen zu führen, welche Rolle die positiven Ionen beim Hervortreten der Lichtemission unter dem Stoße der Kanalstrahlen spielen, habe ich mich folgender Versuchsanordnung bedient.

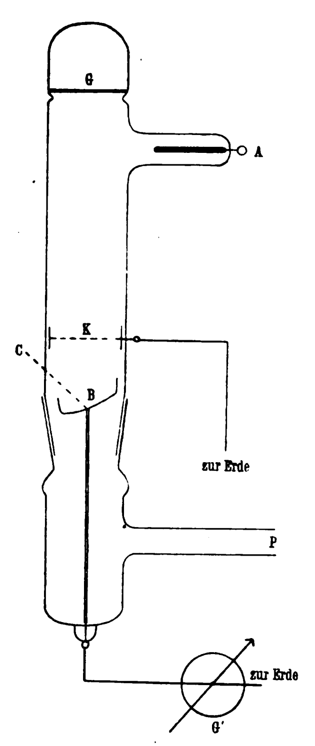
Das Entladungsrohr ist in nachstehender Figur abgebildet. Anode und Kathode sind mit A bzw. K bezeichnet. Die unter-

---

[1]) Es ist nicht ausgeschlossen, daß der physiologische Schwellenwert des Auges bei diesen Erscheinungen eine Rolle spielt.

[2]) J. STARK und G. WENDT, Ann. d. Phys. (4) 38, 669, 1912.

suchte Salzprobe befand sich in der schräggestellten Schale *B*, die, wie die Elektroden, aus Aluminium hergestellt war. Unmittelbar unterhalb der Schale *B* war das Rohr zwecks Einführung der Proben mit einem Schliff versehen. *P* stellt die Verbindung mit dem Pumpsystem vor. *G* ist eine Glimmerplatte. Die Kathode *K* stand in leitender Verbindung mit der Erde. Die Schale *B* war mit einem Galvanometer *G*, dessen anderer Pol geerdet war, metallisch verbunden. Durch das Galvanometer wird also der von den Kanalstrahlen nach der Schale geleitete Strom gemessen. Die Proben beobachtet man in der Richtung *BC* mit einem geradsichtigen Spektroskop.



Während ich bei meinen früheren Untersuchungen eine große Influenzmaschine als Stromquelle benutzte, stand mir bei dieser Untersuchung leider nur ein Funkeninduktor zur Verfügung.

Resultate. Wenn sich kein Salz in der Schale *B* befindet, erhält man in dem Galvanometer stets einen positiven Strom, auch wenn Entladungspotential und Stromstärke sich noch so sehr verändern[1]). Dies ist auch der Fall, wenn man die Schale mit einer beliebigen Metallplatte bedeckt. Füllt man dagegen die Schale mit einem Alkalisalz oder mit einem Salz, das ein Metall der alkalischen Erden oder ein schweres Metall enthält, so kann man die Beobachtung machen, daß sich der Strom bei einem bestimmten Potential im Entladungsrohr sprungweise vermindert. Dann und wann kann er bei weiterer Erhöhung des Entladungspotentials sogar negativ werden. Was die Alkalisalze betrifft, hat V. Kohlschütter[2]) gelegentlich seiner Untersuchungen

[1]) Die Ausschlagsrichtung des Galvanometers habe ich mit einem Trockenelement geprüft.

[2]) V. Kohlschütter, ZS. f. Elektrochem. 17, 393, 1911.

über die chemische Wirkung der Kanalstrahlen diese Tatsache schon vorher festgestellt. Da nach KOHLSCHÜTTER das Entladungspotential keine Rolle zu spielen scheint, erblickt er in dieser Veränderung des Stromes ein Phänomen, das die chemische Zersetzung der Salze begleitet. Seine Eindrücke faßt er mit den Worten zusammen: „daß man es hier mit einem Effekt zu tun hat, der zusammenhängt mit der von FÜCHTBAUER aufgefundenen Sekundärstrahlung und Reflexion der Kanalstrahlen".

Ich habe diese Erscheinung nun an mehreren Salzen studiert, die folgende Metalle enthielten: Na, Li, Mg, Ca, Sr, Ba, Cd, Cu. Überall machte ich die Wahrnehmung, daß die sprunghafte Stromveränderung dem Hervortreten der Serienemission folgt. Solange das Entladungspotential niedriger ist als der Schwellenwert für Serienemission, zeigt das Galvanometer starken positiven Strom. Aber im Augenblick, wo die Linien im Spektroskop hervortreten, wendet das Galvanometer um. Und umgekehrt rückt das Galvanometer schnell nach der positiven Seite hin, sobald das Entladungspotential niedriger ist als der Schwellenwert für Serienemission, und die Linien verschwinden. Da es für eine einzelne Person zu schwierig ist, Galvanometer und Spektroskop gleichzeitig zu beobachten, war mir mein Freund Dr. phil. KURT MOLIN bei einigen Kontrollversuchen behilflich. Einer von uns beobachtete das Spektroskop und paßte das Entladungspotential ab, der andere beobachtete das Galvanometer. Auf ein Signal des Spektroskopbeobachters wurde in demselben Augenblick, wo die Serienlinien auftraten bzw. verschwanden, das Galvanometer abgelesen. Ich führe unten einige bei Li_2CO_3 erzielte Resultate zur Probe an. In den Tabellen bezeichnet „Diff." die infolge einer sehr unwesentlichen Erhöhung bzw. Herabsetzung des Entladungspotentials eingetretene Veränderung des Galvanometers bei dem Werte, wo die Linien hervortreten (Tabelle I) oder verschwinden (Tabelle II). Das Galvanometer war die ganze Zeit so verzweigt, daß die Ausschläge sich innerhalb der Skala hielten. In den Tabellen zeigen die über den Nullwert sich erhebenden Werte der Ausschläge positiven Strom. Übersteigt das Entladungspotential den Schwellenwert, so treten oft negative Stromstärken ein.

Obgleich die Untersuchung infolge der veränderlichen Stromquelle nicht mit der gewünschten Systematik ausgeführt werden



Tabelle I. Das Hervortreten der Serienlinien.

Ausschlag vorher	Ausschlag nachher	Differenz mm
357	325	32
353	330	23
347	321	26
368	330	38
354	324	30
363	333	30

Nullage = 301 mm.

Tabelle II. Das Verschwinden der Serienlinien.

Ausschlag vorher	Ausschlag nachher	Differenz mm
285	335	50
289	341	52
288	347	57
288	349	61
290	335	45

Nullage = 245 mm.

konnte, ersieht man doch aus dem Resultat, daß das Hervortreten der Serienemission zweifellos mit einer Herabsetzung des positiven Stromes durch das Galvanometer verknüpft ist, den die Kanalstrahlen normal verursachen. Und umgekehrt zeigt uns das Experiment, daß das Verschwinden der Serienemission mit einem erneuten Hervortreten des ursprünglichen elektrischen Stromes verknüpft ist. Für diese Erscheinungen habe ich keine andere Erklärung [1]), als die von Stark und Wendt in ihrer von mir oben angeführten Abhandlung über das Entstehen der Serienemission unter dem Stoß der Kanalstrahlen dargelegte, welche Erklärung ich bereits in einem früheren Teile dieses Aufsatzes akzeptierte, sofern es sich um Kathodenstrahlen handelte. Hiernach üben die Kanalstrahlen einen dissoziierenden Einfluß auf das bombardierte Salz aus. Der Dissoziation folgt eine Lichtemission aus dem abgesonderten positiven Metallion, das zur Emission seiner Serienlinien angereizt wird. Meines Erachtens kann gegenwärtig nur diese Erklärung der dem Hervortreten der Lichtemission folgenden elektrischen Erscheinung Gerechtigkeit widerfahren lassen. Der das Galvanometer durchlaufende elektrische Strom macht also den Unterschied aus zwischen der von den Kanalstrahlen beförderten positiven Elektrizität und der dem Salz bei der Abtrennung des positiven Metallions entrissenen positiven Elektrizität. Ist die Bedingung einer starken Metallionströmung vorhanden, kann sogar diese Strömung größer sein

[1]) Hiermit will ich nicht sagen, daß diese Erklärung endgültig ist.

als der primäre Strom der Kanalstrahlen. In diesem Falle gibt das Galvanometer zufälligerweise negativen Ausschlag.

Sobald die instrumentellen Hilfsmittel es erlauben, beabsichtige ich die Erscheinung unter Benutzung einer konstanten Stromquelle eingehender zu studieren. Vor allen Dingen will ich dann versuchen, den Einfluß der Stromstärke und des Entladungspotentials im Entladungsrohr zu ergründen. Diese Untersuchung ist im physikalischen Institut der CHALMERschen technischen Hochschule ausgeführt worden. Dem Leiter des Instituts, Herrn Prof. Dr. JOHN KOCH, spreche ich an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aus für das Wohlwollen, mit welchem er mir die nötigen Instrumente zur Verfügung gestellt hat.

Gotenburg, Phys. Inst. d. CHALMERschen techn. Hochsch. 1917.



Über die Zerstreuung des Lichtes in H_2, O_2 und N_2; von M. Born.

(Eingegangen am 23. Januar 1918.)

Einleitung. In einer seiner letzten Arbeiten [1]) hat M. v. SMOLUCHOWSKI zum ersten Male die RAYLEIGHsche Theorie des Himmelblaus durch Experimente im Laboratorium bestätigt. Er fand bei staubfreier, atmosphärischer Luft eine bläuliche Opaleszenz, welche die von der Theorie geforderte Polarisation zeigte; bei Wasserstoff war die Erscheinung schwächer, bei Äthylchlorid weit stärker als bei Luft, entsprechend der Aussage der Theorie, daß die Zerstreuung der Größe $(n-1)^2$ proportional sein soll (n Brechungsindex).

Nun habe ich in einer kürzlich erschienenen Mitteilung [2]) gezeigt, daß in Gasen mit anisotropen Molekeln außer der RAYLEIGHschen Zerstreuung noch eine andere Art von Opaleszenz zu erwarten ist, die auf den Richtungsschwankungen beruht. Die neue Zerstreuung unterscheidet sich von der RAYLEIGHschen hauptsächlich dadurch, daß sie einen unpolarisierten Anteil hat. Dieser muß sich zeigen, sobald das zerstreute Licht senkrecht zur Richtung des erregenden Strahles mit einem Analysator betrachtet wird, dessen Schwingungsebene den erregenden Strahl enthält; denn dann verschwindet die RAYLEIGHsche Zerstreuung.

SMOLUCHOWSKI hat diesen Effekt nicht beobachtet; er sagt vielmehr ausdrücklich, daß „die Strahlen, welche senkrecht zum einfallenden Licht austreten, vollständig linear polarisiert sind, derart, daß die Polarisationsebene“ (die auf der Schwingungsebene senkrecht steht) „den einfallenden und austretenden Strahl enthält“.

Hieraus wäre zu schließen, daß die Molekeln der von SMOLUCHOWSKI untersuchten Gase, insbesondere H_2 und die Bestandteile O_2 und N_2 der atmosphärischen Luft, nicht merklich aniso-

---

[1]) M. v. SMOLUCHOWSKI, Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie, Cl. des Sciences Math. et Nat., Sér. A, Februar, März, April 1916, S. 218.

[2]) M. BORN, Verh. d. D. Phys. Ges. **19**, 243, 1917.

trop sind. Andererseits besitzen wir aber nach BOHR [1]), DEBYE [2]) und SOMMERFELD [3]) Modelle dieser Molekeln, welche ausgesprochene Anisotropie zeigen. Daher entsteht das Problem, ob hier ein Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung vorliegt, oder ob etwa die Zerstreuung infolge der molekularen Anisotropie nach der Theorie so klein herauskommt, daß sie den Beobachtungsmethoden SMOLUCHOWSKIS, die er selbst als improvisiert bezeichnet, entgehen mußte. Wir werden zeigen, daß das letztere in der Tat der Fall ist. Es erscheint aber nicht unmöglich, mit verbesserten Messungsmethoden die neue Art Zerstreuung aufzufinden; das wäre eine wichtige Prüfung der Molekelmodelle [4]).

Zur Berechnung der Zerstreuung für die BOHRschen Modelle genügen die in meiner zitierten Arbeit angegebenen Formeln nicht, denn diese beruhen auf der Annahme von Schwingungen der Elektronen um Gleichgewichtslagen unter der Wirkung quasielastischer Koppelungen gemäß einem Ansatze, der eine einfache Verallgemeinerung der DRUDEschen Dispersionstheorie darstellt; bei den BOHRschen Modellen aber handelt es sich um Schwingungen der Elektronen um stationäre Bahnen, wobei eine Art von Kreiselkräften entsteht, die sich nicht unter den alten Ansatz fügen.

Tatsächlich sind die besonderen Annahmen meiner früheren Arbeit zur Berechnung der Zerstreuung gar nicht nötig. Ich werde in den ersten Paragraphen zeigen, wie man ohne alle Annahmen über den Mechanismus der Molekel, unter Zulassung von Kreiselwirkungen und Dämpfungskräften, die Zerstreuungsformel

---

1) N. BOHR, Phil. Mag. (6) **26**, 857, 1913.

2) P. DEBYE, Sitzungsber. d. Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-phys. Kl., 9. Jan. 1915. Vgl. auch die Berechnung der magnetischen Rotationsdispersion von H_2 durch P. SCHERRER, Inaug.-Diss. Göttingen 1916 u. Gött. Nachr., Math.-phys. Kl., 1. Juni 1915, S. 179—185.

3) A. SOMMERFELD, ELSTER und GEITEL-Festschrift, S. 549.

4) Herr SOMMERFELD hat mir in liebenswürdiger Weise die Druckbogen seiner Arbeit „Die DRUDEsche Dispersionstheorie vom Standpunkte des BOHRschen Modelles und die Konstitution von H_2, O_2 und N_2“ [Ann. d. Phys. (4) **53**, 497, 1917] vor dem Erscheinen zur Verfügung gestellt. Darin wird gezeigt, daß die Anisotropie der Molekelmodelle für die Berechnung des Brechungsexponenten und der VERDETschen Konstanten aus e, m, h ganz wesentlich ist und gerade den Hauptfortschritt gegenüber der DRUDEschen Dispersionstheorie bedeutet. Es leuchtet ein, daß eine unmittelbare Prüfung der Anisotropie durch Opaleszenzmessungen von Wichtigkeit wäre.

*

finden kann. Diese läßt sich dann leicht auf die Modelle der Molekeln von H_2, O_2 und N_2 anwenden.

§ 1. **Der Mittelwert des Quadrates der Schwankung des elektrischen Moments und die neue Zerstreuungsformel.**

In meiner zitierten Arbeit habe ich gezeigt, daß die Berechnung der neuen Zerstreuung herausläuft auf die Berechnung der Größe $\overline{(\varDelta \mathfrak{p}_q)^2}$, wo $\mathfrak{p}_q$ die Komponente des elektrischen Moments $\mathfrak{p}$ der Molekel in Richtung des auf der Blickrichtung senkrechten Einheitsvektors $\mathfrak{q}$ bedeutet. Für eine anisotrope Molekel hatte ich auf Grund besonderer Annahmen über den Mechanismus der Molekel die Amplitude des Moments $\mathfrak{p}$ durch die Formel [vgl. l. c. 23)]

$$\mathfrak{p} = \sum_j \frac{\mathfrak{L}^{(j)}\,(\mathfrak{L}^{(j)}, \mathfrak{K})}{\omega_j^2 - \omega^2} \tag{1}$$

mit der Amplitude der wirkenden Feldstärke $\mathfrak{K}$ des erregenden Lichtes verknüpft; dabei bedeutete ω die Frequenz des Lichtes, ω_j waren die Eigenfrequenzen der Molekel und $\mathfrak{L}^{(j)}$ gewisse, zu diesen gehörige, in der Molekel feste Vektoren.

Der Ansatz (1) fällt unter die allgemeine Form

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_x &= a_{11}\,\mathfrak{K}_x + a_{12}\,\mathfrak{K}_y + a_{13}\,\mathfrak{K}_z, \\ \mathfrak{p}_y &= a_{21}\,\mathfrak{K}_x + a_{22}\,\mathfrak{K}_y + a_{23}\,\mathfrak{K}_z, \\ \mathfrak{p}_z &= a_{31}\,\mathfrak{K}_x + a_{32}\,\mathfrak{K}_y + a_{33}\,\mathfrak{K}_z. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Diese bleibt auch bestehen, wenn wir von allen Hypothesen über den Bau der Molekel absehen, solange es sich nur um kleine Schwingungen handelt, mögen diese um Gleichgewichtslagen oder um stationäre Kreisbahnen stattfinden; im letzteren Falle ist nur unter $\mathfrak{p}$ nicht das Moment einer einzelnen Molekel zu verstehen, sondern der Mittelwert aller parallelen Molekeln über die Phasen der Rotationsbewegung. Ferner ist auch zulässig, daß die Schwingungen der Elektronen in der Molekel gedämpft sind. Sowohl im Falle der stationären Kreisbahnen, als auch bei Vorhandensein von Dämpfung sind die Koeffizienten a_{ik} komplex und im allgemeinen ist $a_{ik} \neq a_{ki}$. Dann ist der Vektor $\mathfrak{p}$ komplex, und es leuchtet ein, daß die quadratische Schwankung jetzt den Ausdruck

$$\overline{|\varDelta \mathfrak{p}_q|^2} = \overline{\varDelta \mathfrak{p}_q . \varDelta \breve{\mathfrak{p}}_q} \tag{3}$$

hat, wobei wir unter $\tilde{a}$ den konjugierten Wert einer komplexen Zahl a verstehen. Nun ist offenbar

$$\overline{\varDelta \mathfrak{p}_q \cdot \widetilde{\varDelta \mathfrak{p}_q}} = \overline{(\mathfrak{p}_q - \bar{\mathfrak{p}}_q)(\tilde{\mathfrak{p}}_q - \bar{\tilde{\mathfrak{p}}}_q)} = \overline{\mathfrak{p}_q \tilde{\mathfrak{p}}_q} - \bar{\mathfrak{p}}_q \cdot \bar{\tilde{\mathfrak{p}}}_q \qquad 3')$$

Daher läuft die Berechnung der quadratischen Schwankung heraus auf die Bestimmung der Mittelwerte $\bar{\mathfrak{p}}_q$, $\bar{\tilde{\mathfrak{p}}}_q$ und $\overline{\mathfrak{p}_q \tilde{\mathfrak{p}}_q}$, wobei nach 2)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_q = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}) = {} & a_{11}\, \mathfrak{q}_x \mathfrak{K}_x + a_{12}\, \mathfrak{q}_x \mathfrak{K}_y + a_{13}\, \mathfrak{q}_x \mathfrak{K}_z \\ & + a_{21}\, \mathfrak{q}_y \mathfrak{K}_x + a_{22}\, \mathfrak{q}_y \mathfrak{K}_y + a_{23}\, \mathfrak{q}_y \mathfrak{K}_z \\ & + a_{31}\, \mathfrak{q}_z \mathfrak{K}_x + a_{32}\, \mathfrak{q}_z \mathfrak{K}_y + a_{33}\, \mathfrak{q}_z \mathfrak{K}_z \end{aligned}\right\} \qquad 2')$$

ist. Die Mittelung bezieht sich auf alle möglichen Stellungen der Molekel im Raume, während die Vektoren $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{K}$ fest bleiben. Anstatt nun die Molekel zu drehen und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{K}$ festzuhalten, kann man auch die Molekel festhalten und das Vektorenpaar $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{K}$ in relativ unveränderlicher Lage herumbewegen. Daher führt unsere Aufgabe auf folgende Hilfsbetrachtung:

Ein starrer Körper, der zwei Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ trägt, wird so bewegt, daß alle Stellungen im Raume gleich oft vorkommen; gefragt wird nach den Mittelwerten der Produkte der Komponenten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu je zweien und zu je vieren.

Diese Aufgabe ist teilweise schon in meiner zitierten Arbeit gelöst, und wir können uns darauf beziehen. Zunächst ist klar, daß von den Mittelwerten nur die folgenden nicht verschwinden:

$$\left.\begin{aligned} & \overline{\mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x} = \overline{\mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_y} = \overline{\mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_z}, \\ & \overline{\mathfrak{A}_x^2 \mathfrak{B}_x^2} = \overline{\mathfrak{A}_y^2 \mathfrak{B}_y^2} = \overline{\mathfrak{A}_z^2 \mathfrak{B}_z^2}, \\ & \overline{\mathfrak{A}_y^2 \mathfrak{B}_z^2} = \overline{\mathfrak{A}_z^2 \mathfrak{B}_x^2} = \overline{\mathfrak{A}_x^2 \mathfrak{B}_y^2} = \overline{\mathfrak{A}_z^2 \mathfrak{B}_y^2} = \overline{\mathfrak{A}_x^2 \mathfrak{B}_z^2} = \overline{\mathfrak{A}_y^2 \mathfrak{B}_x^2}, \\ & \overline{\mathfrak{A}_y \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y \mathfrak{B}_z} = \overline{\mathfrak{A}_z \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z \mathfrak{B}_x} = \overline{\mathfrak{A}_x \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_y}. \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Offenbar ist

$$\overline{\mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x} = \tfrac{1}{3}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}). \qquad 5)$$

Von den übrigen Mittelwerten sind zwei bereits in meiner zitierten Arbeit berechnet, nämlich [l. c. 30)]:

$$\overline{\mathfrak{A}_x^2 \mathfrak{B}_x^2} = \tfrac{1}{15}\,\{\mathfrak{A}^2 \mathfrak{B}^2 + 2\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2\} \qquad 6)$$

und [l. c. 31)]:

$$\overline{\mathfrak{A}_x \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_y} = \tfrac{1}{30}\,\{3\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2 - \mathfrak{A}^2 \mathfrak{B}^2\}. \qquad 7)$$

Der dritte Mittelwert ergibt sich aus der Identität

$$\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2 = (\mathfrak{A}_x^2 + \mathfrak{A}_y^2 + \mathfrak{A}_z^2)(\mathfrak{B}_x^2 + \mathfrak{B}_y^2 + \mathfrak{B}_z^2)$$
$$= \mathfrak{A}_x^2\mathfrak{B}_x^2 + \mathfrak{A}_y^2\mathfrak{B}_y^2 + \mathfrak{A}_z^2\mathfrak{B}_z^2 + \mathfrak{A}_y^2\mathfrak{B}_z^2 + \mathfrak{A}_z^2\mathfrak{B}_y^2 + \mathfrak{A}_z^2\mathfrak{B}_x^2 + \mathfrak{A}_x^2\mathfrak{B}_z^2 + \mathfrak{A}_x^2\mathfrak{B}_y^2 + \mathfrak{A}_y^2\mathfrak{B}_x^2;$$

denn daraus folgt nach 4)

$$\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2 = 3\,\overline{\mathfrak{A}_x^2\mathfrak{B}_x^2} + 6\,\overline{\mathfrak{A}_x^2\mathfrak{B}_y^2},$$

und nach 6)

$$\overline{\mathfrak{A}_x^2\mathfrak{B}_y^2} = \tfrac{1}{15}\left[2\,\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2 - (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2\right]. \tag{8}$$

Diese Hilfsformeln wenden wir auf die Vektoren $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{K}$ an. Wir bezeichnen den Winkel zwischen ihnen mit ψ und beachten, daß $|\mathfrak{q}| = 1$ und $(\mathfrak{q}\,\mathfrak{K}) = |\mathfrak{K}|\cos\psi$ ist. Dann erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{q}_x\mathfrak{K}_x} &= \tfrac{1}{3}\,|\mathfrak{K}|\cos\psi, \\ \overline{\mathfrak{q}_x^2\mathfrak{K}_x^2} &= \tfrac{1}{15}\,\mathfrak{K}^2(1 + 2\cos^2\psi), \\ \overline{\mathfrak{q}_x^2\mathfrak{K}_y^2} &= \tfrac{1}{15}\,\mathfrak{K}^2(2 - \cos^2\psi), \\ \overline{\mathfrak{q}_x\mathfrak{q}_y\mathfrak{K}_x\mathfrak{K}_y} &= \tfrac{1}{30}\,\mathfrak{K}^2(3\cos^2\psi - 1); \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

hierzu treten die aus 4) entspringenden Relationen, während alle in 4) nicht vorkommenden Mittelwerte verschwinden. Indem wir zunächst nur den letzteren Umstand verwenden, ergibt sich leicht aus 2'):

$$\bar{\mathfrak{p}}_q = \overline{\mathfrak{q}_x\mathfrak{K}_x}\,(a_{11} + a_{22} + a_{33}),$$
$$\bar{\tilde{\mathfrak{p}}}_q = \overline{\mathfrak{q}_x\mathfrak{K}_x}\,(\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22} + \tilde{a}_{33}),$$
$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{p}_q\tilde{\mathfrak{p}}_q} = {} & \overline{\mathfrak{q}_x^2\mathfrak{K}_x^2}\,(a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{22}\tilde{a}_{22} + a_{33}\tilde{a}_{33}) \\ & + \overline{\mathfrak{q}_x^2\mathfrak{K}_y^2}\,(a_{23}\tilde{a}_{23} + a_{31}\tilde{a}_{31} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{32}\tilde{a}_{32} + a_{13}\tilde{a}_{13} + a_{21}a_{21}) \\ & + \overline{\mathfrak{q}_x\mathfrak{q}_y\mathfrak{K}_x\mathfrak{K}_y}\,(a_{22}\tilde{a}_{33} + a_{33}\tilde{a}_{11} + a_{11}\tilde{a}_{22} + a_{33}\tilde{a}_{22} + a_{11}\tilde{a}_{33} \\ & \quad + a_{22}\tilde{a}_{11} + a_{23}\tilde{a}_{32} + a_{31}\tilde{a}_{13} + a_{12}\tilde{a}_{21} + a_{32}\tilde{a}_{23} \\ & \quad + a_{13}\tilde{a}_{31} + a_{21}\tilde{a}_{12}). \end{aligned}$$

Wir führen nun die Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} a &= a_{11} + a_{22} + a_{33}, \\ A &= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{22}\tilde{a}_{22} + a_{33}\tilde{a}_{33}, \\ B &= a_{22}\tilde{a}_{33} + a_{33}\tilde{a}_{11} + a_{11}\tilde{a}_{22} + a_{33}\tilde{a}_{22} + a_{11}\tilde{a}_{33} + a_{22}\tilde{a}_{11}, \\ C &= a_{23}\tilde{a}_{32} + a_{31}\tilde{a}_{13} + a_{12}\tilde{a}_{21} + a_{32}\tilde{a}_{23} + a_{13}\tilde{a}_{31} + a_{21}\tilde{a}_{12}, \\ D &= a_{23}\tilde{a}_{23} + a_{31}\tilde{a}_{31} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{32}\tilde{a}_{32} + a_{13}\tilde{a}_{13} + a_{21}\tilde{a}_{21}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Diese Größen sind sämtlich reell. Mit ihrer Hilfe erhalten wir unter Benutzung von 9):

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathfrak{p}}_q &= \tfrac{1}{3}\,|\mathfrak{K}|\cos\psi\,.\,a, \\ \bar{\tilde{\mathfrak{p}}}_q &= \tfrac{1}{3}\,|\mathfrak{K}|\cos\psi\,.\,\tilde{a}, \\ \overline{\mathfrak{p}_q\tilde{\mathfrak{p}}_q} &= \tfrac{1}{30}\,\mathfrak{K}^2\,\{2A(1+2\cos^2\psi)+2D(2-\cos^2\psi) \\ &\qquad +(B+C)(3\cos^2\psi-1)\} \\ &= \tfrac{1}{30}\,\mathfrak{K}^2\,\{(2A-B-C+4D)+\cos^2\psi \\ &\qquad (4A+3B+3C-2D)\}. \end{aligned}\right\} \quad 11)$$

Da nun offenbar nach 10)

$$a\tilde{a} = A + B \qquad 10')$$

ist, so ist

$$\bar{\mathfrak{p}}_q\,.\,\bar{\tilde{\mathfrak{p}}}_q = \tfrac{1}{9}\,\mathfrak{K}^2\cos^2\psi\,(A+B)$$

und es folgt nach 3) und 3'):

$$\left.\begin{aligned} \overline{|\Delta\mathfrak{p}_q|^2} &= \tfrac{1}{30}\,\mathfrak{K}^2\,\{(2A-B-C+4D) \\ &\qquad + \tfrac{1}{3}\cos^2\psi\,(2A-B+9C-6D)\}. \end{aligned}\right\} \quad 12)$$

Es sei N die Anzahl der Molekeln im cm^3 für den betrachteten Zustand, $N_0 = 2{,}8 . 10^{19}$ die Anzahl der Molekeln im cm^3 für den Normalzustand (0^0 C und 760 mm Hg Druck); $\frac{N}{N_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0}$ ist das Dichteverhältnis.

Wir führen nun die auf den Normalzustand bezogenen Parameter

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{N_0^2}{30}\cdot\frac{1}{3}(2A-B+9C-6D), \\ \Omega_2 &= \frac{N_0^2}{30}\cdot(2A-B-C+4D) \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

ein. Dann wird

$$\overline{|\Delta\mathfrak{p}_q|^2} = \frac{\mathfrak{K}^2}{N_0^2}\,(\Omega_1\cos^2\psi + \Omega_2). \qquad 14)$$

Diese Größe bestimmt die Zerstreuung durch Richtungsschwankungen. Wir vergleichen sie mit der entsprechenden Größe, die die Zerstreuung durch Dichteschwankungen (nach Rayleigh) bestimmt; diese ist nach Formel 3) meiner zitierten Arbeit unter Berücksichtigung des Umstandes, daß hier $\mathfrak{p}$ komplex ist

$$|\bar{\mathfrak{p}}_q|^2 = \bar{\mathfrak{p}}_q\,.\,\bar{\tilde{\mathfrak{p}}}_q = \tfrac{1}{9}\,\mathfrak{K}^2\cos^2\psi\,.\,a\,.\,\tilde{a}.$$

Wir haben früher [l. c. 36)] die Größe

$$\Phi = \frac{N}{3} a$$

eingeführt; wir wollen hier lieber mit der Abkürzung $\Omega_0 = \Phi . \tilde{\Phi}$, bezogen auf den Normalzustand, oder

$$\Omega_0 = \frac{N_0^2}{9} a \tilde{a} = \frac{N_0^2}{9} (A + B) \tag{13'}$$

rechnen. Dann wird

$$|\tilde{\mathfrak{p}}_q|^2 = \frac{\mathfrak{K}^2}{N_0^2} \Omega_0 \cos^2 \psi. \tag{14'}$$

Die gesamte Zerstreuung erhalten wir gemäß den Formeln 3) und 10) meiner früheren Arbeit, indem wir die Ausdrücke 14) und 14') addieren und mit

$$\frac{\pi^2 V N}{\lambda^4 r^2} = \frac{\pi^2 V N_0}{\lambda^4 r^2} \cdot \frac{\varrho}{\varrho_0}$$

multiplizieren. Wir wollen dabei die wirksame Feldstärke $\mathfrak{K}$ mit der Feldstärke im einfallenden Lichtstrahle identifizieren, was bei Gasen erlaubt ist; d. h. wir ersetzen $\left(\frac{\varepsilon + 2}{3}\right)^2$ durch 1 und $\mathfrak{K}^2$ durch E^2 [Formel 41), l. c.]. Dann erhalten wir schließlich:

$$\overline{\mathfrak{E}}_q^2 = \frac{\pi^2 V \varrho}{N_0 \lambda^4 r^2 \varrho_0} E^2 \left[(\Omega_0 + \Omega_1) \cos^2 \psi + \Omega_2\right]. \tag{15}$$

Hier bedeutet das Glied mit Ω_0 die Rayleighsche Zerstreuung, die Glieder mit Ω_1, Ω_2 die neue Zerstreuung durch Richtungsschwankungen. Der Zahlenfaktor hat den Wert $\pi^2/N_0 = 3{,}54 . 10^{-19}$.

§ 2. Invariantentheoretische Ergänzung und Diskussion von Spezialfällen.

Die Zerstreuungsparameter Ω_0, Ω_1, Ω_2 sind nach 13), 13') lineare Funktionen der Größen A, B, C, D und damit nach 10) homogene quadratische Ausdrücke aus den reellen und imaginären Teilen der Größen a_{ik}. Aus der Bildungsweise geht hervor, daß die Ω_0, Ω_1, Ω_2 von der Wahl des Koordinatensystems, in welchem die Größen a_{ik} nach 2) definiert sind, nicht abhängen. Aber es ist den Ausdrücken nicht ohne weiteres anzusehen, daß es sich um Invarianten handelt. Daher wird es nicht überflüssig sein, sie auf bekannte Invarianten zurückzuführen; damit wird zugleich eine Kontrolle der Rechnung gewonnen.

Wir machen zunächst die Voraussetzung, daß die Größen a_{ik} sämtlich reell seien. Dann können wir die a_{ik} anschaulich deuten als Koeffizienten einer infinitesimalen Transformation des Raumes

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

Eine solche läßt sich stets zerlegen in eine homogene Deformation und eine Drehung. Setzt man entsprechend

$$a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}, \tag{16}$$

so gilt für die Koeffizienten der homogenen Deformation

$$b_{ik} = b_{ki}, \tag{16'}$$

und für die Koeffizienten der Drehung

$$c_{ik} = -c_{ki}. \tag{16''}$$

Nun ist anschaulich klar, daß die homogene Deformation drei Invarianten hat, nämlich die drei Achsen des Deformationsellipsoids

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2\,b_{23}yz + 2\,b_{31}zx + 2\,b_{12}xy = \text{konst.},$$

die Hauptdilatationen. Die Drehung hat nur eine Invariante, nämlich die Größe der Drehung.

Man gewinnt die Hauptdilatationen als Wurzeln der Gleichung dritten Grades

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

deren Koeffizienten offenbar ebenfalls Invarianten, und zwar rationale Invarianten sind. Die Gleichung lautet explizite

$$\lambda^3 - \lambda^2(b_{11}+b_{22}+b_{33}) + \lambda\left\{\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}\right\}$$
$$+ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{vmatrix} = 0.$$

Das Quadrat des Koeffizienten von λ^2 und der Koeffizient von λ sind quadratische Invarianten; wir bezeichnen sie mit

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= (b_{11}+b_{22}+b_{33})^2, \\ J_2 &= (b_{22}b_{33}+b_{33}b_{11}+b_{11}b_{22}) - (b_{23}^2+b_{31}^2+b_{12}^2). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die Größe der Drehung ist bestimmt durch die quadratische Invariante:

$$J_3 = c_{23}^2 + c_{31}^2 + c_{12}^2. \tag{17'}$$

Wir zeigen nun, daß im Falle reeller a_{ik} die Größen Ω_0, Ω_1, Ω_2 durch J_1, J_2, J_3 ausgedrückt werden können.

Hierzu führen wir in 10) die Zerlegung 16) aus und erhalten mit Rücksicht auf 16') und 16''):

$$\left.\begin{aligned} A &= b_{11}^2 + b_{22}^2 + b_{33}^2, \\ B &= 2(b_{22}b_{33} + b_{33}b_{11} + b_{11}b_{22}), \\ C &= 2[(b_{23}^2 + b_{31}^2 + b_{12}^2) - (c_{23}^2 + c_{31}^2 + c_{12}^2)], \\ D &= 2[(b_{23}^2 + b_{31}^2 + b_{12}^2) + (c_{23}^2 + c_{31}^2 + c_{12}^2)]. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Daraus folgt nach 13), 13'):

$$\left.\begin{aligned} \Omega_0 &= \frac{N_0^2}{9} J_1, \\ \Omega_1 &= \frac{N_0^2}{15} \cdot \left(\tfrac{1}{3}[J_1 - 3J_2] - 5J_3\right), \\ \Omega_2 &= \frac{N_0^2}{15} \cdot (J_1 - 3J_2 + 5J_3). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Um den Nachweis der Invarianz für komplexe a_{ik} zu führen, benutzen wir den Satz, daß aus jeder quadratischen Invariante einer Form eine bilineare Simultaninvariante zweier Formen durch „Faltung“ erzeugt werden kann. So entstehen aus den Invarianten J_1, J_2, J_3 durch Faltung mit den entsprechenden Invarianten der konjugiert komplexen Formen $(\tilde{b}_{ik})$ und $(\tilde{c}_{ik})$ die bilinearen Simultaninvarianten:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= (b_{11} + b_{22} + b_{33})(\tilde{b}_{11} + \tilde{b}_{22} + \tilde{b}_{33}), \\ J_2 &= \tfrac{1}{2}(b_{22}\tilde{b}_{33} + b_{33}\tilde{b}_{11} + b_{11}\tilde{b}_{22} + b_{33}\tilde{b}_{22} + b_{11}\tilde{b}_{33} + b_{22}\tilde{b}_{11}) \\ &\qquad - (b_{23}\tilde{b}_{23} + b_{31}\tilde{b}_{31} + b_{12}\tilde{b}_{12}), \\ J_3 &= c_{23}\tilde{c}_{23} + c_{31}\tilde{c}_{31} + c_{12}\tilde{c}_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{17''}$$

Aus diesen setzen sich die Größen Ω_0, Ω_1, Ω_2 gemäß den Formeln 19) zusammen.

Man kann aus den Formeln 19) das Verhalten der Ω_0, Ω_1, Ω_2 für spezielle Fälle ablesen. Sind die a_{ik} symmetrisch, also die $c_{ik} = 0$, so ist $J_3 = 0$ und es gilt

$$\Omega_1 = \tfrac{1}{3}\Omega_2 = \frac{N_0^2}{45}(J_1 - 3J_2).$$

Gilt insbesondere die Formel 1), ist also

$$b_{11} = \sum_j \frac{\mathfrak{L}_x^{(j)2}}{\omega_j^2 - \omega^2}, \; \ldots, \; b_{23} = \sum_j \frac{\mathfrak{L}_y^{(j)} \mathfrak{L}_z^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2}, \; \ldots,$$

so wird

$$J_1 = \left(\sum_j \frac{\mathfrak{L}^{(j)2}}{\omega_j^2 - \omega^2} \right)^2 = \sum_j \sum_i \frac{\mathfrak{L}^{(j)2} \mathfrak{L}^{(i)2}}{(\omega_j^2 - \omega^2)(\omega_i^2 - \omega^2)},$$

$$J_2 = \sum_j \sum_i \frac{(\mathfrak{L}_y^{(j)2} \mathfrak{L}_z^{(i)2} + \cdots) - (\mathfrak{L}_y^{(j)} \mathfrak{L}_z^{(j)} \mathfrak{L}_y^{(i)} \mathfrak{L}_z^{(i)} + \cdots)}{(\omega_j^2 - \omega^2)(\omega_i^2 - \omega^2)},$$

und daraus folgt durch leichte Rechnung:

$$J_1 - 3 J_2 = \frac{1}{2} \sum_j \sum_i \frac{3(\mathfrak{L}^{(j)} \mathfrak{L}^{(i)})^2 - \mathfrak{L}^{(j)2} \mathfrak{L}^{(i)2}}{(\omega_j^2 - \omega^2)(\omega_i^2 - \omega^2)}.$$

Also wird

$$\Omega_1 = \tfrac{1}{3} \Omega,$$

wo Ω dieselbe Bedeutung hat, wie in meiner früheren Arbeit [l. c. 40)], nur bezogen auf den Normalzustand.

Daher lautet der von den Richtungsschwankungen herrührende Bestandteil der Zerstreuung nach 15):

$$\overline{\mathfrak{E}_q^2} = \frac{\pi^2 V \varrho}{N_0 \lambda^4 r^2 \varrho_0} E^2 \Omega \left(1 + \frac{\cos^2 \psi}{3}\right),$$

was bis auf den fortgelassenen Faktor $\frac{1}{9}(\varepsilon + 2)^2$ mit der Formel 43) der früheren Arbeit übereinstimmt.

§ 3. Die Zerstreuung in H_2, O_2, N_2. Die RAYLEIGHsche Zerstreuung eines Gases läßt sich ohne Hypothese über die Struktur der Molekel berechnen; denn es ist (bei Vernachlässigung der Dämpfung)

$$\Omega_0 = (n^2 - 1)^2, \tag{20}$$

wo n der Brechungsindex, reduziert auf den Normalzustand, ist, der unabhängig von jeder Theorie durch Messung gefunden werden kann.

Mit der neuen Zerstreuung steht es ungünstiger; da sie von der Anisotropie der Molekel abhängt, erfordert ihre Berechnung eine genauere Kenntnis des molekularen Aufbaues. Hierdurch hat man aber andererseits den Vorteil, daß der Vergleich der aus einem bestimmten Molekelmodell berechneten Zerstreuung mit der Erfahrung zur Prüfung dieses Modells dienen kann.



Wir besitzen nun für die permanenten Gase H_2, O_2 und N_2 Modelle, die auf den von BOHR geschaffenen Prinzipien beruhen und die insoweit mit der Erfahrung im Einklange sind, als sie die Größe des Brechungsindex im sichtbaren Spektrum richtig zu berechnen erlauben. Die Berechnung der Zerstreuung durch Richtungsschwankungen für diese Modelle kann vielleicht ein Mittel zu ihrer genaueren Prüfung werden.

Nach DEBYE und SOMMERFELD bestehen diese Modelle aus einem rotierenden Elektronenring und zwei positiven, symmetrisch gelegenen Kernen auf der Achse. Bei H_2 enthält der Ring nur zwei Elektronen und die Kerne sind einfach geladen (DEBYEsche Wasserstoffmolekel). Bei O_2 enthält der Ring vier Elektronen und die Kerne sind doppelt geladen; dabei vertritt jeder solche Kern die Wirkung des eigentlich achtfach geladenen O-Kerns und von sechs weiteren Elektronen, die sich in engen Ringen um den Kern lagern. Bei N_2 besteht der Ring aus sechs Elektronen und die Kerne sind dreifach geladen, wobei jeder solche Kern wieder die Wirkung des eigentlich siebenfach geladenen N-Kerns nebst vier eng an diesem kreisenden Elektronen vertritt. Die Anzahl der Elektronen des Ringes bezeichnen wir nach SOMMERFELD mit μ; es ist also für H_2 $\mu = 2$, für O_2 $\mu = 4$, für N_2 $\mu = 6$, und diese Zahl entspricht, wie SOMMERFELD nachgewiesen hat, der Valenz, deren engen Zusammenhang mit der Dispersion schon DRUDE erkannt hat.

Wir entnehmen nun den Rechnungen DEBYES und SOMMERFELDS den Zusammenhang zwischen mittlerem Moment der Molekel und wirkender Feldstärke [Formeln 2)], wobei wir, um Verwechslungen zu vermeiden, SOMMERFELDS Bezeichnungen anwenden wollen.

Wir nennen also die Ladung des Elektrons in elektrostatischen Einheiten e, seine Masse m, die Frequenz des rotierenden Elektronenringes ω und die Frequenz[1]) des erregenden Lichtes s.

Nun gibt DEBYE in seiner zitierten Arbeit über „die Konstitution des Wasserstoffmoleküls“ die Ausdrücke für die Komponenten des Moments $\mathfrak{p}$, gemittelt über alle Phasen der Drehbewegung und bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen z-Achse

[1]) Ich habe in meiner zitierten Arbeit über die Zerstreuung die Frequenz des Lichtes mit ω bezeichnet; man muß diesen Wechsel der Bezeichnung beachten.



mit der Rotationsachse zusammenfällt [Formeln 25), 25′) und 21″) seiner Abhandlung]. Wir schreiben diese Ausdrücke in SOMMERFELDs Bezeichnung folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{p}_x &= -\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}\left\{\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)+f\left(-\frac{s}{\omega}\right)\right]\mathfrak{K}_x\right.\\
&\qquad\left.+\frac{i}{2}\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)-f\left(-\frac{s}{\omega}\right)\right]\mathfrak{K}_y\right\},\\
\mathfrak{p}_y &= -\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}\left\{-\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)-f\left(-\frac{s}{\omega}\right)\right]\mathfrak{K}_x\right.\\
&\qquad\left.+\frac{i}{2}\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)+f\left(-\frac{s}{\omega}\right)\right]\mathfrak{K}_y\right\},\\
\mathfrak{p}_z &= -\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}\,\varphi\left(\frac{s}{\omega}\right)\mathfrak{K}_z.
\end{aligned}\right\} \quad 21)$$

Hier ist für H_2 $\mu = 2$ zu setzen; f und φ sind rationale Funktionen ihres Arguments von folgender Form:

$$\left.\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x-2)^2 - c_0}{(x-1)^4 + c_1(x-1)^2 + c_2(x-1) + c_3},\\
\varphi(x) &= \frac{1}{x^2 - c_4},
\end{aligned}\right\} \quad 22)$$

wobei die Konstanten c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 aus der Konfiguration des Modells numerisch berechnet werden.

Für O_2 und N_2 finden sich in der SOMMERFELDschen Arbeit die entsprechenden Ausdrücke der Komponenten von $\mathfrak{p}$ nicht explizite angegeben; doch zeigt eine eingehende Betrachtung seiner Theorie, daß hier dieselben Formeln 21) gelten, wobei nur $\mu = 4$ bzw. $= 6$ zu setzen ist und die Konstanten $c_0, \ldots c_4$ in 22) andere Zahlenwerte haben [1]).

Durch den Vergleich von 21) mit 2) finden wir

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= a_{22} = -\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}\cdot\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)+f\left(-\frac{s}{\omega}\right)\right],\\
a_{33} &= -\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}\,\varphi\left(\frac{s}{\omega}\right),\\
a_{12} &= -a_{21} = -\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}\cdot\frac{i}{2}\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)-f\left(-\frac{s}{\omega}\right)\right],\\
a_{13} &= a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad 23)$$

1) Herr Prof. SOMMERFELD war so freundlich, mir die Richtigkeit dieser Behauptung zu bestätigen.

und danach haben die Anteile b_{ik}, c_{ik} gemäß 16) die Werte:

$$
\left.\begin{aligned}
b_{11} &= b_{22} = -\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)+f\left(-\frac{s}{\omega}\right)\right],\\
b_{33} &= -\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}\varphi\left(\frac{s}{\omega}\right),\\
b_{23} &= b_{32} = b_{31} = b_{13} = b_{12} = b_{21} = 0,\\
c_{12} &= -c_{21} = -\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}\cdot\frac{i}{2}\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)-f\left(-\frac{s}{\omega}\right)\right],\\
c_{13} &= c_{31} = c_{23} = c_{32} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad 23')
$$

Wir bilden nun nach 17″) die Invarianten J_1, J_2, J_3:

$$
\left.\begin{aligned}
J_1 &= \left(\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}\right)^2\cdot\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)+f\left(-\frac{s}{\omega}\right)+\varphi\left(\frac{s}{\omega}\right)\right]^2,\\
J_2 &= \left(\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)+f\left(-\frac{s}{\omega}\right)\right]\\
&\qquad\cdot\left[\frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{s}{\omega}\right)+f\left(-\frac{s}{\omega}\right)\right\}+2\varphi\left(\frac{s}{\omega}\right)\right],\\
J_3 &= \left(\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}\right)^2\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)-f\left(-\frac{s}{\omega}\right)\right]^2.
\end{aligned}\right\} \qquad 24)
$$

Hieraus folgt:

$$
J_1 - 3J_2 = \left(\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)+f\left(-\frac{s}{\omega}\right)-2\varphi\left(\frac{s}{\omega}\right)\right]^2. \qquad 24')
$$

Da der Parameter Ω_0 der Rayleighschen Zerstreuung nach 20) durch dén Brechungsindex gegeben ist, der als bekannt zu gelten hat, berechnen wir nur Ω_1 und Ω_2 nach 19):

$$
\left.\begin{aligned}
\Omega_1 &= \frac{1}{60}\left(\frac{4\pi N_0 e^2\mu}{m\omega^2}\right)^2\left\{\frac{1}{3}\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)+f\left(-\frac{s}{\omega}\right)-2\varphi\left(\frac{s}{\omega}\right)\right]^2\right.\\
&\qquad\left.-5\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)-f\left(-\frac{s}{\omega}\right)\right]^2\right\},\\
\Omega_2 &= \frac{1}{60}\left(\frac{4\pi N_0^2 e^2\mu}{m\omega^2}\right)^2\left\{\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)+f\left(-\frac{s}{\omega}\right)-2\varphi\left(\frac{s}{\omega}\right)\right]^2\right.\\
&\qquad\left.+5\left[f\left(\frac{s}{\omega}\right)-f\left(-\frac{s}{\omega}\right)\right]^2\right\}.
\end{aligned}\right\} \qquad 25)
$$

Hier ist es nötig, eine Bemerkung über das in Ω_1 auftretende, negative Vorzeichen zu machen. Man erkennt, daß Ω_1 für gewisse Frequenzen negative Werte annehmen kann; wir werden

sehen, daß das bei H_2 schon im Gebiete ziemlich langer Wellen der Fall ist. Nun scheint es auf den ersten Blick unmöglich, daß ein Anteil der zerstreuten Lichtenergie negativ ausfällt. Tatsächlich ist aber die gesamte, durch Richtungsschwankungen zerstreute Energie nach 15) proportional mit

$$\Omega_1 \cos^2 \psi + \Omega_2,$$

und dies ist immer positiv, da nach 25) sowohl $\Omega_2 > 0$, als auch $\Omega_1 + \Omega_2 > 0$ ist. Man darf also den polarisierten Anteil der durch Richtungsschwankungen zerstreuten Energie nicht für sich betrachten. Allerdings ist sehr bemerkenswert, daß der unpolarisierte Anteil der Zerstreuung auf Kosten des polarisierten Anteils, der doch auch die RAYLEIGHsche Zerstreuung umfaßt, sich bereichern kann. Die Ursache davon sind die Kreiselwirkungen oder gyroskopischen Terme [Koeffizienten c_{ik}, 23′)].

Für die numerische Berechnung genügt in einem großen Teile des Spektrums, wie bei der Diskussion der Brechung durch DEBYE und SOMMERFELD, eine hinter den ersten Gliedern abgebrochene Potenzentwickelung nach $\frac{s}{\omega}$.

Man erhält:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{1}{15}\left(\frac{4\pi N_0 e^2 \mu}{m\omega^2}\right)^2 \\ &\quad \cdot \left\{\frac{1}{3}(f_0 - \varphi_0)^2 + \frac{s^2}{\omega^2}\left[\frac{1}{3}(f_0 - \varphi_0)(f_0'' - \varphi_0'') - 5 f_0'^2\right]\right\}, \\ \Omega_2 &= \frac{1}{15}\left(\frac{4\pi N_0 e^2 \mu}{m\omega^2}\right)^2 \\ &\quad \left\{(f_0 - \varphi_0)^2 + \frac{s^2}{\omega^2}\left[(f_0 - \varphi_0)(f_0'' - \varphi_0'') + 5 f_0'^2\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \quad 25')$$

Die Funktionen f und φ hat SOMMERFELD berechnet[1]); sie lauten:

$$H_2: \left\{\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 4x + 4{,}155}{x^4 - 4x^3 + 4{,}310\,x^2 - 0{,}620\,x - 1{,}298}, \\ \varphi(x) &= \frac{1}{x^2 - 0{,}310}. \end{aligned}\right.$$

---

[1]) In der zitierten Annalenarbeit; dieser sind auch einige der folgenden Zahlentabellen entnommen.

$$O_2: \begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3{,}77}{x^4 - 4x^3 + 3{,}967\,x^2 - 0{,}794\,x - 2{,}424}, \\ \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2 - 0{,}397}. \end{cases}$$

$$N_2: \begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3{,}37}{x^4 - 4x^2 + 3{,}606\,x^2 - 0{,}947\,x - 3{,}699}, \\ \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2 - 0{,}471}. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich für die Werte dieser Funktionen und ihrer Ableitungen bei $x = 0$ folgende Zahlen:

	f_0	f_0'	f_0''	φ_0	φ_0''
H_2	$-3{,}202$	$+4{,}61$	$-27{,}21$	$-3{,}230$	$-20{,}89$
O_2	$-1{,}555$	$+2{,}16$	$-7{,}34$	$-2{,}52$	$-12{,}69$
N_2	$-0{,}911$	$+1{,}32$	$-2{,}99$	$-2{,}13$	$-9{,}01$

Sodann erhält man für die in 25') vorkommenden Verbindungen:

	$(f_0 - \varphi_0)^2$	$(f_0 - \varphi_0)(f_0'' - \varphi_0'')$	$5 f_0'^2$
H_2	0,00078	$-0{,}177$	106,3
O_2	0,922	$+5{,}14$	23,3
N_2	1,489	$+7{,}34$	8,70

Wir benutzen ferner die für Atmosphärendruck und 0° C aus dem Kathodenstrahlwerte von $\frac{e}{m}$ und der FARADAYschen Konstanten folgende Zahl

$$\frac{N_0 e^2}{m} = 6{,}85 \,.\, 10^{27};$$

dann ist der universelle Faktor in 25'):

$$\frac{1}{15}\left(\frac{4\pi N_0 e^2}{m}\right)^2 = 4{,}95 \,.\, 10^{56}.$$

Schließlich führen wir die Wellenlänge im Vakuum λ durch die Beziehung

$$s = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{1{,}886 \,.\, 10^{11}}{\lambda}$$

ein.

Alsdann erhält man:

$$H_2: \begin{cases} \Omega_1 = \dfrac{5{,}76 \,.\, 10^{53}}{\omega^4}\left(1 - \dfrac{1{,}30 \,.\, 10^{28}}{\omega^2 \lambda^2}\right), \\ \Omega_2 = \dfrac{1{,}545 \,.\, 10^{54}}{\omega^4}\left(1 + \dfrac{4{,}84 \,.\, 10^{27}}{\omega^2 \lambda^2}\right). \end{cases}$$

$$O_2: \begin{cases} \Omega_1 = \dfrac{2{,}43 \,.\, 10^{57}}{\omega^4}\left(1 - \dfrac{2{,}50 \,.\, 10^{24}}{\omega^2 \lambda^2}\right), \\ \Omega_2 = \dfrac{7{,}30 \,.\, 10^{57}}{\omega^4}\left(1 + \dfrac{1{,}10 \,.\, 10^{24}}{\omega^2 \lambda^2}\right). \end{cases}$$

$$N_2: \begin{cases} \Omega_1 = \dfrac{8{,}84 \,.\, 10^{57}}{\omega^4}\left(1 - \dfrac{4{,}49 \,.\, 10^{23}}{\omega^2 \lambda^2}\right), \\ \Omega_2 = \dfrac{2{,}65 \,.\, 10^{58}}{\omega^4}\left(1 + \dfrac{3{,}83 \,.\, 10^{23}}{\omega^2 \lambda^2}\right). \end{cases}$$

Für die Umlaufsfrequenz ω nehmen wir, um möglichst hypothesenfrei vorzugehen, diejenigen Werte, die Debye und Sommerfeld aus dem Verlauf des Brechungsindex abgeleitet haben, nämlich

	ω
H_2	$4{,}51 \,.\, 10^{16}$
O_2	$3{,}48 \,.\, 10^{16}$
N_2	$3{,}40 \,.\, 10^{16}$

Nur bei H_2 stimmt dieser Wert mit demjenigen überein, den der einfache Quantenansatz (Impulsmoment für jedes Elektron gleich $h/2\pi$) liefert; für O_2 und N_2 glaubt Sommerfeld diesen Ansatz verändern zu müssen. Unsere Rechnung ist bis zu gewissem Grade von der Anwendung der Quantentheorie unabhängig.

Mit obigen Werten finden wir:

$$H_2: \begin{cases} \Omega_1 = 1{,}39 \,.\, 10^{-13}\left(1 - \dfrac{6{,}40 \,.\, 10^{-6}}{\lambda^2}\right), \\ \Omega_2 = 3{,}73 \,.\, 10^{-13}\left(1 + \dfrac{2{,}38 \,.\, 10^{-6}}{\lambda^2}\right). \end{cases}$$

$$O_2: \begin{cases} \Omega_1 = 1{,}65 \,.\, 10^{-9} \left(1 - \dfrac{2{,}06 \,.\, 10^{-9}}{\lambda^2}\right), \\ \Omega_2 = 4{,}97 \,.\, 10^{-9} \left(1 + \dfrac{9{,}08 \,.\, 10^{-10}}{\lambda^2}\right). \end{cases}$$

$$N_2: \begin{cases} \Omega_1 = 6{,}60 \,.\, 10^{-9} \left(1 - \dfrac{3{,}88 \,.\, 10^{-10}}{\lambda^2}\right), \\ \Omega_2 = 1{,}98 \,.\, 10^{-8} \left(1 + \dfrac{3{,}31 \,.\, 10^{-10}}{\lambda^2}\right). \end{cases}$$

Zum Vergleiche setzen wir die Parameter der RAYLEIGHschen Zerstreuung darunter; wir erhalten sie nach 20) aus den gemessenen Brechungsindizes. Da diese nur wenig von 1 abweichen, können wir 20) schreiben:

$$\Omega_0 = 4\,(n - 1)^2.$$

Dann finden wir aus den von SOMMERFELD benutzten Messungsergebnissen von J. KOCH und M. CUTHBERTSON:

$$H_2: \quad \Omega_0 = 7{,}41 \,.\, 10^{-8} \left(1 + \frac{1{,}52 \,.\, 10^{-10}}{\lambda^2}\right),$$

$$O_2: \quad \Omega_0 = 2{,}83 \,.\, 10^{-7} \left(1 + \frac{1{,}40 \,.\, 10^{-10}}{\lambda^2}\right),$$

$$N_2: \quad \Omega_0 = 3{,}46 \,.\, 10^{-7} \left(1 + \frac{1{,}05 \,.\, 10^{-10}}{\lambda^2}\right).$$

Man erkennt nun folgendes:

Bei H_2 sind die von λ unabhängigen Glieder in Ω_1 und Ω_2 verschwindend klein gegen die in Ω_0; dagegen sind die Faktoren von λ^{-2} in Ω_1 und Ω_2 nur etwa zehnmal kleiner als bei Ω_0. Hier tritt übrigens der oben erwähnte Fall ein, daß im ganzen Spektrum $\Omega_1 < 0$ wird. Bei O_2 und N_2 betragen die von λ freien Glieder in Ω_1 und Ω_2 im besten Falle etwa 6 Proz. der entsprechenden Glieder von Ω_0; die Faktoren von λ^{-2} sind relativ beträchtlicher. Die Werte sind immerhin so klein, daß sie den Beobachtungen SMOLUCHOWSKIs wohl entgehen konnten. Andererseits sind sie groß genug, daß vielleicht eigens zu ihrer Auffindung angestellte Versuche die Entscheidung bringen könnten, ob der Effekt vorhanden ist oder nicht. Dabei wird es vorteilhaft sein, kurze Lichtwellen und hohe Gasdichten zu verwenden, wie ein Blick auf die Formel 15) zeigt.

Verhandlungen
der
Deutschen Physikalischen Gesellschaft

Im Auftrage der Gesellschaft herausgegeben
von
Karl Scheel

20. Jahrg. 30. April 1918. Nr. 5/8.

Sitzung vom 22. Februar 1918.

Vorsitzender: Hr. H. RUBENS.

Hr. **M. Born** berichtet

über die Zerstreuung des Lichtes in H_2, N_2 und O_2.

(Schon abgedruckt S. 16—32.)

Ferner gibt Hr. **E. Madelung**

eine Veranschaulichung der Formel $A - U = T \frac{dA}{dT}$.

Zur Veröffentlichung in den „Verhandlungen" der Gesellschaft ist eine Mitteilung eingegangen von

Hrn. **O. Lehmann:** Über die Bestimmung der Elastizitätsgrenze.

Als Mitglieder wurden in die Gesellschaft aufgenommen:

Hr. Prof. Dr. ERWIN LOHR, Deutsche technische Hochschule Brünn, z. Z. Wien VI, Theobaldgasse 5,

Hr. Dr. ERWIN SCHRÖDINGER, Privatdozent an der Universität Wien, Wien I, Gluckstraße 3.

(Beide vorgeschlagen durch Hrn. J. v. GEITLER.)

Hr. Dr. R. GLOCKER, Stuttgart, Kriegsbergstraße 13.
(Vorgeschlagen durch Hrn. K. R. v. KOCH.)

Hr. Dr. FRANZ ROTHER, Assistent am Physikalischen Institut der Universität Leipzig, Linnéstraße 5.
(Vorgeschlagen durch Hrn. ERICH LEHMANN.)

Sitzung vom 8. März 1918.

Vorsitzender: E. WARBURG.

Der Vorsitzende teilt mit, daß die Mitglieder der Gesellschaft

Dr. phil. **Albert Lessing**
† 20. Januar 1918,

an den Folgen einer Gasvergiftung im Osten, und

Geheimer Regierungsrat Professor Dr. **Otto Reichel**
† 24. Januar 1918

verstorben sind. Die Anwesenden ehren das Andenken der Verstorbenen durch Erheben von ihren Sitzen.

Sodann spricht Hr. **F. Henning** über die

Berechnung der Strahlungskonstanten c_2 und σ.

Ferner berichtet Hr. **K. W. Wagner** über die

Überspannung beim Unterbrechen induktiver Stromkreise und Schutzmittel dagegen.

Zur Veröffentlichung in den „Verhandlungen" der Gesellschaft ist eine Mitteilung eingegangen von

Hrn. **Koloman Széll:** Über die Rotationsentropie der dreiatomigen Gase.

Als Mitglieder wurden in die Gesellschaft aufgenommen:

Hr. Witold v. Kasparowicz, Zürich, Schweiz, Konradstraße 66.
(Vorgeschlagen durch Hrn. Karl Scheel.)

Hr. Dr. Wilhelm John, Berlin NW 87, Waldstraße 55, I.
(Vorgeschlagen durch Hrn. A. Einstein.)

Hr. Dr. C. O. G. Borelius, Lund, Schweden, Universität.
(Vorgeschlagen durch Hrn. Manne Siegbahn.)

Hr. Dr. Gustav Schweickert, z. Z. Assistent beim Militärversuchsamt, Charlottenburg 1, Kaiser Friedrichstraße 12.
(Vorgeschlagen durch Hrn. H. Finger.)

Hr. Dr. Otto Droysen, Berlin-Friedenau, Albestraße 12.
(Vorgeschlagen durch Hrn. A. Kalähne.)

Über die Elektrizitätsleitung der Metalle bei tiefer Temperatur;

von E. Grüneisen.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 8. Februar 1918.)

---

1. In einer früheren Mitteilung [1]) hatte ich auf die merkwürdig einfache empirische Beziehung hingewiesen, daß der elektrische Widerstand eines einatomigen Metalls im Gebiete tiefer Temperaturen nahezu proportional ist dem Produkte aus absoluter Temperatur und Atomwärme. Diese Beziehung

$$w \sim T C_p$$

ist eine spezielle Form des allgemeineren, aus den Untersuchungen von KAMERLINGH ONNES und NERNST folgenden Satzes: Der spezifische Widerstand eines einatomigen reinen Metalls verläuft in tiefer Temperatur proportional einer universellen Funktion von T/Θ, wo Θ die charakteristische Temperatur des Metalls nach der DEBYEschen Theorie der Atomwärmen bedeutet. In der Tat wird in tiefer Temperatur $C_p = C_v$ und C_v ist eine universelle Funktion von T/Θ. Um dies in unserer Beziehung zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir sie

$$w \sim T \cdot F\left(\frac{T}{\Theta}\right) \cdot \frac{C_p}{C_v}, \tag{1}$$

wobei F die Form der DEBYEschen Atomwärme-Funktion [2]) besitzen soll.

Befriedigende theoretische Erklärungen für das Verhalten des Widerstandes in tiefer Temperatur, geschweige denn für obige Beziehung, sind bisher noch nicht gegeben worden. Nur das ist sehr wahrscheinlich gemacht, daß die Änderung des Widerstandes

---

[1]) Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 186, 1913.

[2]) P. DEBYE, Ann. d. Phys. (4) **39**, 789, 1912.

mit der Temperatur aufs innigste zusammenhängt mit der Zunahme der Schwingungsamplitude der Atome.

Die folgende Untersuchung wurde angestellt, um zunächst rein empirisch weitere Aufklärung über die Elektrizitätsleitung der Metalle zu bringen und dadurch vielleicht einer befriedigenden Theorie den Boden mit bereiten zu helfen. Über neue Versuche kann ich nicht berichten. Es sind aber seit meiner früheren Bearbeitung des Gegenstandes so wertvolle Beobachtungen von anderer Seite neu hinzugekommen, daß es mir der Mühe wert schien, noch einmal möglichst genau zu prüfen, für welche Metalle und innerhalb welcher Grenzen eine Beziehung von der Form 1 gültig ist.

Von höchstem Interesse schien mir besonders die Feststellung, bis in welche Nähe des Überleitungszustandes unsere Beziehung zutrifft. Daß sie in diesem Zustande selbst bedeutungslos sein muß, ist wohl von vornherein klar, weil die Formel, wenn auch theoretisch ungeklärt, doch zweifellos den Widerstand mit den Atomschwingungen in Zusammenhang bringt, diese aber im Zustande der Überleitung als Widerstandserreger offenbar ausgeschaltet sind. Das Versagen der Formel in tiefster Temperatur wird durch die Versuche von MEISSNER[1]) anscheinend bestätigt, der für Kupfer bereits bei 20° abs. den Widerstand wesentlich langsamer abfallend fand, als es der Formel 1) entspricht. Auch haben KAMERLINGH ONNES und HOLST[2]) gezeigt, daß der nach 1) aus dem Widerstande berechnete Wert der Atomwärme von Quecksilber bei 4,3° abs. sich wesentlich zu hoch ergibt, was mit MEISSNERs Resultat im Einklang steht.

2. Über das bei der Prüfung von Formel 1) eingeschlagene Verfahren kann folgendes vorausgeschickt werden. Die Beobachtungen sind meist in der Form gegeben, daß das Verhältnis r des Widerstandes bei der Temperatur T zum Widerstand bei der Temperatur 273,1° gebildet ist. Diesem Brauch habe ich mich angeschlossen, nur daß ich bisweilen statt 273,1° eine andere, tiefer liegende Bezugstemperatur T_0 eingeführt habe, um sie noch in den Gültigkeitsbereich der Formel zu verlegen. Es war schon bei meiner ersten Veröffentlichung bemerkt worden, daß oberhalb

---

[1]) W. MEISSNER, Ann. d. Phys. (4) **47**, 1001, 1915.
[2]) H. KAMERLINGH ONNES und G. HOLST, Comm. of Leiden Nr. 142c, 30.

etwa $T = 1{,}5\,\Theta$ die Formel versagt. Die den beobachteten r entsprechenden $r_{\text{ber.}}$ findet man nach dem Gesagten aus

$$r = \frac{\left[T F\left(\frac{T}{\Theta}\right)\cdot\frac{C_p}{C_v}\right]_T}{\left[T F\left(\frac{T}{\Theta}\right)\cdot\frac{C_p}{C_v}\right]_{T_0}}. \tag{2}$$

Die Werte von F wurden einer graphischen Darstellung der DEBYEschen Funktion entnommen, die von C_p/C_v einer früheren Arbeit[1]). Die Werte für Θ wurden den Widerstandsbeobachtungen angepaßt. Dabei zeigte sich nun, daß nur für einige Metalle, wie Pb, Au, Pt, Ag die aus dem Widerstandsverlauf gewonnene charakteristische Temperatur Θ_r nahe übereinstimmte mit der, welche für die Atomwärme teils bekannt ist, teils zu erwarten steht, Θ_c. Für andere Metalle, wie Cu und Fe, erwies sich $\Theta_r > \Theta_c$, für wieder andere, wie Zn, Cd, Hg ist $\Theta_r < \Theta_c$. Und zwar handelt es sich gerade bei der letzten Gruppe um erhebliche Unterschiede. Es muß allerdings hervorgehoben werden, daß man über den Verlauf der Atomwärme von Hg, Zn und Cd noch keine so vollständigen Angaben besitzt, wie z. B. für Pb, Cu, Ag. Immerhin erscheinen die Unterschiede in Θ so groß, daß sie nicht auf Versuchsunsicherheiten oder Materialunterschiede zurückgeführt werden können. Im Gegenteil werden wir sehen, daß wahrscheinlich die Unterschiede in Θ ein Urteil über die Einfachheit der Struktur im festen Zustande gewinnen lassen. — Infolge des veränderten Θ-Wertes verliert natürlich dann auch die Funktion F ihre Bedeutung als Atomwärme C_v. Auch der Korrektionsfaktor C_p/C_v erscheint in solchen Fällen ziemlich willkürlich und wurde deshalb beim Zn, Cd und Hg lieber fortgelassen.

Bekanntlich werden die Untersuchungen über den Verlauf des Widerstandes in tiefer Temperatur außerordentlich erschwert durch die mangelnde Reinheit der Metalle und den Einfluß der Behandlung. Wenn auch die Regel MATTHIESSENS vom konstanten Zusatzwiderstande nach KAMERLINGH ONNES und NERNST auch in

[1]) E. GRÜNEISEN, Ann. d. Phys. (4) **26**, 401, 1908. Die Berechnung des Verhältnisses für tiefe Temperaturen erfolgte nach der thermodynamischen Formel unter Beachtung der angenäherten Konstanz von $(3\,\alpha v)/(\varkappa\,C_v)$ und der angenäherten Proportionalität von $3\,\alpha\,T$ mit dem Widerstandsverhältnis r für reine Metalle. Man hat angenähert $C_p/C_v = 1 + r\,.\,\text{const.}$



tiefer Temperatur angenähert gilt und eine Reduktion der Widerstände r auf reines Material nach der NERNSTschen Regel [1]) möglich erscheinen läßt [2]), so bleibt doch über die Größe des Zusatzwiderstandes, wenn man zu sehr tiefen Temperaturen kommt, eine erhebliche Unsicherheit bestehen. Vergleiche weiter unten das Beispiel des Goldes. Am vorteilhaftesten zur Prüfung unserer Beziehung sind solche Metalle, welche keine Mischkristalle bilden und daher im allgemeinen frei sind von den konstanten Zusatzwiderständen.

3. Blei. Unter diesen Metallen ist wiederum Blei das am eingehendsten untersuchte und jedenfalls eines, welches frei ist vom Verdacht, mehratomig zu sein. In den Tabellen 1 und 2 sind Beobachtungen von KAMERLINGH ONNES und CLAY [3]) bzw. KEESOM [4]), ferner von HENNING [5]) und MEISSNER [6]) aufgeführt (Spalte 3). In Spalte 2 die nach Formel 2) berechneten r. Bezugstemperatur ist 91,7°. Die in Bruchteilen des Ganzen ausgedrückten Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung (Spalte 4) halten sich zwischen etwa 120° und 14,4° abs. in niedrigen Grenzen und erreichen selbst beim Eisschmelzpunkt erst 2 Proz. Hier wie im folgenden soll auf die Abweichungen in höherer Temperatur nicht

Tabelle 1. Blei: $\Theta_r = 90$ (KAMERLINGH ONNES und CLAY).

T	$r_{ber.}$	$r_{beob.}$	$\frac{r_{beob.}}{r_{ber.}} - 1$
14,4	0,040	0,043	+ 0,08
18,0	0,075	0,076	+ 0,02
20,3	0,101	0,100	− 0,01
56,5	0,565	0,565	±
68,6	0,717	0,717	±
78,0	0,832	0,834	+ 0,002
89,5	0,973	0,972	− 0,001
91,7	1,000	1,000	±

1) W. NERNST, Ann. d. Phys. (4) **36**, 395, 1911.

2) Vgl. hierzu besonders H. SCHIMANK, Ann. d. Phys. (4) **45**, 706; **46**, 176, 1914.

3) H. KAMERLINGH ONNES und J. CLAY, Comm. of Leiden, Nr. 99c, 26.

4) W. H. KEESOM und H. KAMERLINGH ONNES, Comm. of Leiden, Nr. 147a, 7.

5) F. HENNING, Temperaturmessung, Braunschweig 1915, S. 105.

6) W. MEISSNER, l. c., S. 1038.

Tabelle 2. Blei: $\Theta_r = 92$.

T	$r_{\text{ber.}}$	$r_{\text{beob.}}$	$\frac{r_{\text{beob.}}}{r_{\text{ber.}}} - 1$
14,93 [1]	0,0425	0,0422	– 0,007
20,4 [1]	0,0990	0,0978	– 0,012
21,8 [2]	0,1156	0,1155	– 0,001
80	0,856	0,855	– 0,001
90	0,979	0,978	– 0,001
91,7 [2]	1,000	1,000	±
100	1,102	1,099	– 0,003
120	1,344	1,344	±
150	1,707	1,713	+ 0,004
200	2,320	2,342	+ 0,009
273,1	3,23	3,30	+ 0,02

viel Wert gelegt werden. Erstens sind die von mir früher berechneten und jetzt angenommenen Zahlen für C_p/C_v mit einer gewissen Unsicherheit behaftet — für Pb ist $(C_p/C_v)_{273} = 1{,}055$ gesetzt —, zweitens ist es sicher, daß in höherer Temperatur der Faktor C_p/C_v nicht gültig bleibt, sondern einem Ausdruck allgemeinerer Form Platz machen muß. Meissner, der die Formel $w \sim T C_p$ in der Weise prüfte, daß er nicht die berechneten, sondern die direkt beobachteten C_p einsetzte, fand die Formel gerade in höherer Temperatur in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung.

Aus dem Verlauf des Widerstandes ergibt sich in Tabelle 1 und 2

$$\Theta_r = 90 \text{ bzw. } 92,$$

während nach den neuesten und ausgedehntesten Messungen der Atomwärme [3])

$$\Theta_c = 88 \text{ bis } 90$$

folgt.

In tiefer Temperatur erstreckt sich die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung auch auf die von Meissner

1) Kamerlingh Onnes und Keesom.

2) Meissner. Alle übrigen Zahlen nach Henning.

3) A. Eucken und F. Schwers, Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 578, 1913; W. H. Keesom und H. Kamerlingh Onnes, Comm. of Leiden, Nr. 143.

bestimmten Temperaturkoeffizienten, wie folgende Zusammenstellung zeigt[1]):

T	$\frac{1}{r}\frac{dr}{dT}$	
	ber.	beob.
91,7⁰	0,0123	0,0122
21,8⁰	0,103	$0{,}097_5$

Für Blei ist also nicht allein die Darstellung der Beobachtungen durch Formel 1) bis herab zu 14,4⁰ gut, sondern auch eine bemerkenswerte Übereinstimmung zwischen Θ_r und Θ_c zu konstatieren.

Kamerlingh Onnes schätzt, daß Blei bei etwa 6⁰ überleitend wird. Leider ist das Intervall zwischen 4,4⁰ und 14,4⁰ dem Experiment noch nicht zugänglich gewesen, so daß auch nicht festgestellt werden kann, wo der Widerstand von Blei etwa langsamer zu sinken beginnt, als es unserer Formel entspricht.

4. Cadmium. Beim Cadmium liegen die Verhältnisse wesentlich anders als beim Blei. Tabelle 3 lehrt auf den ersten Blick, daß nicht nur in höherer, sondern auch in tiefer Temperatur deutliche systematische Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung[2]) bestehen bleiben. Die Kurve der beobachteten Widerstände verläuft mit weniger Krümmung, als die der berechneten und durchläuft in tiefster Temperatur wesentlich höhere Werte. Die Konstante Θ, mit der immerhin zwischen 163⁰ und 20⁰ abs. eine mäßige Wiedergabe der Beobachtungen möglich ist, hat den Wert

$$\Theta_r = 117,$$

sie liegt also wesentlich niedriger, als die aus der Atomwärme[3]) folgende

$$\Theta_c = 150 - 180.$$

---

[1]) Meissner, der selbst diese Prüfung schon vorgenommen hat, ist für 21,8⁰, anscheinend durch ein Versehen, zu einem wesentlich ungünstigeren Resultat gekommen, l. c., S. 1051.

[2]) Die Zahlen stammen von H. Kamerlingh Onnes und G. Holst, Comm. of Leiden, Nr. 142a; A. Eucken und G. Gehlhoff, Verh. d. D. Phys. Ges. **14**, 169, 1912; Lees, Phil. Trans. **208**, 432, 1908.

[3]) Nach der Zusammenstellung von E. H. und Ezer Griffiths, Proc. Roy. Soc. London (A) **90**, 557, 1914.

Tabelle 3. Cadmium: $\Theta_r = 117$.

T	$r_{ber.}$	$r_{beob.}$	$\frac{r_{beob.}}{r_{ber.}} - 1$
4,2	0,000 18	0,001 53	+ 7,5
14,8	0,025 4	0,027 8	+ $0,09_4$
20,2	0,069 5	0,069 4	− $0,00_1$
71,9	0,762	0,752	− $0,01_3$
83 [1]	0,908	0,874	− $0,03_7$
89,9	1,000	1,000	±
102,1 [2]	1,16	1,17	+ 0,01
147,7 [2]	1,73	1,78	+ 0,03
162,6 [2]	1,92	1,98	+ 0,03
194 [1]	2,30	2,40	+ 0,04
240,6 [2]	2,87	2,99	+ 0,04
289,7	3,47	3,67	+ 0,06

Mir scheint das Verhalten des Widerstandes darauf hinzudeuten, daß Cd nicht zu denjenigen Metallen gehört, die um ihrer normalen Eigenschaften willen gewöhnlich als einatomig im festen Zustande angesehen werden. Ein abweichendes Verhalten des Cd zeigt sich auch darin, daß es nicht regulär kristallisiert, wobei allerdings bemerkt werden muß, daß Einatomigkeit und Zugehörigkeit zum regulären Kristallsystem noch nicht als sich gegenseitig bedingende Eigenschaften erwiesen sind. Auch die thermische Ausdehnung des Cd zeigt außer der von Fizeau gefundenen Anisotropie noch andere Anomalien[3]). Wenn aus dem Verlauf der Atomwärme bisher noch nicht auf eine Ungültigkeit der einfachen Debyeschen Formel geschlossen wurde[4]), so könnte das damit zusammenhängen, daß die Beobachtungen noch nicht bis zu hinreichend niedrigen Temperaturen fortgesetzt wurden.

5. Zink. Für dies Metall ist die Darstellung der Leesschen Beobachtungen[5]) (Tabelle 4) im ganzen Intervall von 363 bis $93{,}4_0$ durch Formel 2) überraschend gut, wenn man

$$\Theta_r = 185$$

---

1) Eucken und Gehlhoff.
2) Lees. Alle anderen Messungen von Kamerlingh Onnes und Holst.
3) Ann. d. Phys. (4) **33**, 55, 1910.
4) R. Ewald, Ann. d. Phys. (4) **44**, 1213, 1914.
5) l. c.

wählt, d. h. wieder erheblich niedriger als für die Atomwärme, die etwa

$$\Theta_c = 225 - 230$$

erfordert. In tiefer Temperatur werden vermutlich ähnliche Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung auftreten, wie beim Cadmium, denn die für dies Metall angeführten Anomalien zeigt auch das Zink.

Tabelle 4. Zink: $\Theta_r = 185$ (LEES).

T	$r_{\text{ber.}}$	$r_{\text{beob.}}$	$\frac{r_{\text{beob.}}}{r_{\text{ber.}}} - 1$
93,4	0,272	0,271	$-0{,}00_4$
102,4	0,306	0,304	$-0{,}00_7$
170,6	0,565	0,570	$+0{,}00_9$
198,8	0,669	0,669	±
208,2	0,703	0,702	$-0{,}00_1$
250,6	0,855	0,858	$+0{,}00_4$
290,9	1,000	1,000	±
322,9	1,116	1,114	$-0{,}00_2$
363,1	1,258	1,266	$+0{,}00_6$

6. Quecksilber. Quecksilber verhält sich ganz ähnlich wie Cadmium. Die Darstellung der Beobachtungen von KAMERLINGH ONNES und HOLST[1]) (Tabelle 5) durch die Formel 2) mit

$$\Theta_r = 47$$

fällt im Intervall 90 bis 4,37° nicht ungünstig aus. Immerhin zeigt sich auch hier der gestrecktere Verlauf der beobachteten Kurve, der bei 4,37°, also dicht oberhalb der Temperatur des Überleitendwerdens, zu Werten führt, die die berechneten um mehr als 100 Proz. übertreffen. Ebenso haben wir die starke Differenz gegen die aus der Atomwärme abgeleiteten Θ-Werte. Gewöhnlich wird

$$\Theta_c = 97$$

für die Atomwärme des Hg[2]) angegeben. Beim Heliumsiedepunkt finden jedoch KAMERLINGH ONNES und HOLST[3])

$$\Theta_c = 60,$$

[1]) H. KAMERLINGH ONNES und G. HOLST, Comm. of Leiden, Nr. 142a.
[2]) F. POLLITZER, ZS. f. Elektrochem. 19, 513, 1913.
[3]) H. KAMERLINGH ONNES und G. HOLST, Comm. of Leiden, Nr. 142c.

so daß hier noch eine große Unsicherheit darüber besteht, ob sich die Atomwärme des Hg mit einer einzigen Grenzfrequenz darstellen läßt. Es scheint fast, daß dies nicht der Fall ist, sondern daß Quecksilber im festen Zustande zu der Gruppe Zn, Cd, Sn gehört, die sich in mancher Beziehung anomal verhalten. Die Tatsache, daß Hg im kubischen System kristallisiert, läßt allerdings keine Besonderheiten der Struktur erwarten.

Tabelle 5. Quecksilber: $\Theta_r = 47$.

T	$r_{ber.}$	$r_{beob.}$	$\frac{r_{beob.}}{r_{ber.}} - 1$
< 4,19	überleitend		
4,37	0,003 02	0,007 21	+ 1,39
14,57	0,102	0,103	$+ 0{,}01_0$
15,78	0,118	0,118	±
17,89	0,145	0,143	$- 0{,}01_3$
20,39	0,178	0,172	$- 0{,}03_4$
57,8	0,628	0,620	$- 0{,}01_3$
68,1	0,746	0,741	$- 0{,}00_7$
75,2	0,828	0,827	$- 0{,}00_1$
$80{,}9_2$	0,891	0,890	$- 0{,}00_1$
$90{,}1_3$	1,000	1,000	±
154,2	1,72	1,80	$+ 0{,}04_7$
234,2	2,64	2,95	$+ 0{,}11_7$

7. Gold. Gold gehört, wie alle noch zu behandelnden Metalle, zu denen, welche Mischkristalle bilden und daher nur in äußerster Reinheit frei von konstanten Zusatzwiderständen sind. Glücklicherweise sind wir im Besitz von Versuchen an außerordentlich reinem Gold, wie wohl aus den folgenden Tabellen 6 und 7 geschlossen werden darf. Für das Gold V von Kamerlingh Onnes und Clay [1]) dürfte der Zusatzwiderstand etwa 2 Prom. des Widerstandes beim Eispunkt ausmachen, für das Gold, welches Mylius für Meissner [2]) gereinigt hat, sogar nur wenige Zehntausendstel, ein Beweis für die vorzügliche Reinigungsmethode von Mylius [3]).

Die Tabellen 6 bis 11 sind angeordnet wie die früheren, nur daß in Spalte 4 die Differenz zwischen beobachteten und

---

1) H. Kamerlingh Onnes und J. Clay, Comm. of Leiden, Nr. 99.
2) W. Meissner, l. c.
3) F. Mylius, ZS. f. anorg. Chem. **70**, 203, 1911.

Tabelle 6. Gold: $\Theta_r = 190$.

T	$r_{ber.}$	$r_{beob.}$	beob. — ber.	Beobachter
11,1	0,000 6	0,002 5	+ 0,001 9	KAMERLINGH ONNES und CLAY
12,1	0,000 9	0,002 7	+ 0,001 8	
14,3	0,001 7	0,003 6	+ 0,001 9	
18,0	0,004 2	0,005 7	+ 0,001 5	
20,2	0,006 6	0,008 1	+ 0,001 5	
21,5	0,008 2_9	0,008 3_6	+ 0,000 0_7	MEISSNER
57,8	0,130	0,133	+ 0,003	KAMERLINGH ONNES und CLAY
68,1	0,173	0,179	+ 0,006	
75,2	0,204	0,209	+ 0,005	
90,1	0,267	0,271	+ 0,004	
91,5	0,273	0,276	+ 0,003	MEISSNER
169,3	0,590	0,593	+ 0,003	KAMERLINGH ONNES und CLAY
273,1	1,000	1,000	±	

berechneten Zahlen nicht mehr in Bruchteilen, sondern absolut angegeben ist. Auf diese Weise springen konstante Zusatzwiderstände deutlich in die Augen. In Tabelle 6 und 7 (Spalte 3) sind die Beobachtungen von KAMERLINGH ONNES und CLAY mit denen von MEISSNER vereinigt, in Tabelle 6 ohne jede Korrektion, in Tabelle 7 wegen eines konstanten Zusatzwiderstandes von 0,0019 nach der NERNSTschen Regel umgerechnet auf reines Gold, während MEISSNERs Zahlen unkorrigiert sind. Die $r_{ber.}$ sind in beiden Tabellen etwas verschieden gewonnen. In Tabelle 6 ist mit einem konstanten Werte

$$\Theta_r = 190$$

gerechnet, der jedoch in höherer Temperatur einen zu starken Abfall der berechneten Kurve ergibt. Deshalb wurde in Tabelle 7 in allerdings etwas roher Weise mit einer veränderlichen, nach tiefen Temperaturen hin steigenden Frequenz gerechnet, wie sie die DEBYEsche Theorie der spezifischen Wärme ja tatsächlich verlangt, und gesetzt

$$\text{von } 273{,}1 \text{ bis } 57{,}8^0\text{: } \Theta_r = 184$$
$$\text{„ } 57{,}8 \text{ „ } 11{,}1^0\text{: } \Theta_r = 195.$$

Man erzielt hierbei eine wirklich sehr gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung über das ganze Temperatur-

intervall von 273,1 bis 11,1° abs., und es findet sich in den Beobachtungen kein Grund zu der Annahme, daß man bei 11,1° an der Grenze des Gültigkeitsbereichs der Formel sei, denn die Differenzen in Spalte 4 von Tabelle 7 haben wechselndes Vorzeichen[1]).

Tabelle 7. Gold: 273/57,8 : $\Theta_r = 184$; 57,8/11,1 : $\Theta_r = 195$.
Annahme eines konstanten Zusatzwiderstandes 0,0019 für die Beobachtungen von KAMERLINGH ONNES uud CLAY.

T	$r_{\text{ber.}}$	$r_{\text{beob.}}$	beob. — ber.	
11,1	0,000 60	0,000 63	+ 0,000 03	
12,1	0,000 84	0,000 81	− 0,000 03	
14,3	0,001 66	0,001 70	+ 0,000 04	
18,0	0,004 14	0,003 80	− 0,000 34	$\Theta_r = 195$
20,2	0,006 44	0,006 21	− 0,000 23	
21,5 [2])	0,008 12	0,008 36	+ 0,000 24	
57,8	0,133	0,132	− 0,001	
68,1	0,177	0,177	±	
75,2	0,207	0,207	±	
90,1	0,270	0,270	±	$\Theta_r = 184$
91,5 [2])	0,276	0,276	±	
169,3	0,591	0,592	+ 0,001	
273,1	1,000	1,000	±	

Für den Temperaturkoeffizienten des Widerstandes bei 21,5° folgt nach Formel 1) bzw. nach MEISSNERs Beobachtung

T	$10^3 \frac{dr}{dT}$		$10^3 \frac{1}{r}\frac{dr}{dT}$	
	ber.	beob.	ber.	beob.
21,5	1,40	1,28	172	153

Da dr/dT von einem konstanten Zusatzwiderstande nicht beeinflußt werden darf, müßte für diese Größe Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung bestehen. Man kann sagen, daß dies hinreichend der Fall ist.

[1]) Es muß zugegeben werden, daß gerade hier bei Gold V die Wahl des Zusatzwiderstandes nicht ohne Willkür ist. Nimmt man ihn zu 0,0017 an, so würde schon von 14,3° an die beobachtete Kurve über der berechneten verlaufen.

[2]) Beobachtungen von MEISSNER, unkorrigiert.

Was nun die Übereinstimmung der charakteristischen Temperaturen aus Widerstand und Atomwärme betrifft, so kann diese nur indirekt geschlossen werden. Sowohl die bekannten Frequenzformeln, wie auch der Abfall des thermischen Ausdehnungskoeffizienten mit der Temperatur machen es wahrscheinlich, daß für die Atomwärme gilt

$$\Theta_c = 180 \text{ bis } 190.$$

Für $(C_p/C_v)_{273}$ wurde die Zahl 1,031 genommen.

Tabelle 8. Platin: $\Theta_r = 230$ (Meissner).

T	$r_{\text{ber.}}$	$r_{\text{beob.}}$	beob. — ber.
20,7	0,004 3	0,006 3	+ 0,002 0
91,4	0,253	0,250	− 0,003
273,1	1,000	1,000	—
373,8	1,401	1,396	− 0,005
	Pt IV (Henning).		
20,3	0,004 0	0,006 1	+ 0,002 1
90,1	0,247 8	0,245 3	− 0,002 5
197,1	0,694 7	0,694 0	− 0,000 7
373,1	1,398	1,392	− 0,006

8. Platin. In Tabelle 8 finden sich die Beobachtungen von Meissner[1]) und Henning[2]) an zwei Proben des reinsten, bisher bekannten Platins, in Tabelle 9 die Beobachtungen von Kamerlingh Onnes und Clay[3]) an einem wesentlich unreineren Material. Die berechneten Widerstände sind durch Einsetzen der Frequenz

$$\Theta_r = 230$$

in Formel 2) gewonnen worden, also eines Wertes, der jedenfalls nahe übereinstimmt mit der Frequenz aus der Atomwärme, vielleicht jedoch etwas größer ist. Maßgebend für die Wahl obigen Wertes war die Übereinstimmung, die sich damit für den Temperaturkoeffizienten des Widerstandes bei 20,7° abs. nach Meissners Messungen ergibt:

1) W. Meissner, l. c., S. 1038.
2) F. Henning, l. c., S. 103 (Pt IV).
3) H. Kamerlingh Onnes und J. Clay, Comm. of Leiden, Nr. 99 b.

T	$10^3 \frac{dr}{dT}$		$10^3 \frac{1}{r}\frac{dr}{dT}$	
	ber.	beob.	ber.	beob.
20,7	0,81	0,80	188	127

Denn man darf ja erwarten, daß dr/dT durch einen kleinen Zusatzwiderstand nicht beeinflußt wird.

Es zeigt sich nun, daß man auf Grund unserer Formel mit $\Theta_r = 230$ für das Pt der Tabelle 8 einen Zusatzwiderstand von 0,002, für das Pt von Tabelle 9 einen solchen von 0,0100 anzunehmen hätte. In der Tat kommt man nach Korrektion der Beobachtungen in Tabelle 9 mittels der NERNSTschen Regel zu Zahlen $r_{\text{korr.}}$, welche in tiefer Temperatur bis zu 14,2° abs. leidlich mit den berechneten übereinstimmen. Die im Temperaturgebiet 90 bis 56° noch übrig bleibenden Abweichungen finden sich auch in Tabelle 8, zeigen also einen systematischen Fehler der Formel 2 für Platin. Sie könnten fast vollständig beseitigt werden, wenn man statt des benutzten, aus den thermodynamischen Daten berechneten Verhältnisses

$$(C_p/C_v)_{273} = 1{,}02$$

das den Beobachtungen von GAEDE und SCHLETT entsprechende Verhältnis 1,04 einsetzte [1]).

Ergebnis für Platin: Bis 14,2° hinab ist keine Andeutung dafür vorhanden, daß der Widerstand langsamer abfiele als der Formel entspricht.

Tabelle 9. Platin: $\Theta_r = 230$; $r_{\text{korr.}} = \frac{r_{\text{beob.}} - 0{,}01}{1 - 0{,}01}$

(KAMERLINGH ONNES und CLAY).

T	$r_{\text{beob.}}$	$r_{\text{korr.}}$	$r_{\text{ber.}}$	korr. — ber.
14,2	0,010 72	$0{,}000\,7_3$	0,000 96	$-0{,}0_3 23$
17,9	0,012 44	$0.002\,4_6$	0,002 45	$+0{,}0_3 01$
20,3	0,014 21	$0{,}004\,2_5$	0,004 02	$+0{,}0_3 23$
56,5	0,110 16	0,101 3	0,103 6	− 0,0023
68,4	0,159 7	0,151 2	0,153 7	− 0,0025
90,3	0,252 8	0,245 3	0,248 4	− 0,0031
273,1	1,000 0	1,000 0	1,000 0	±

[1]) d. h. das Verhältnis der beobachteten Atomwärme C_p zur theoretisch nach DEBYE berechneten C_v.

9. Silber. Bekanntlich zeigen Silber und Platin nahezu gleich schnellen Abfall der Atomwärme mit der Temperatur. Der deshalb angestellte Versuch, die Widerstandsmessungen von KAMERLINGH ONNES und CLAY[1]) an einem allerdings nicht sehr reinen Silber mit derselben charakteristischen Temperatur 230 darzustellen, die sich im vorigen Abschnitt für Pt ergeben hatte, führte zu den in Tabelle 10 mitgeteilten Zahlen $r_{\text{ber.}}$, die darauf hinweisen, daß das Silber noch einen Zusatzwiderstand im Betrage von etwa 0,005 besaß. Wenigstens kann man unter dieser Annahme die Beobachtungen von 373° bis hinab zu 20° abs. ziemlich gut durch Formel 2) wiedergeben, wenn man noch setzt

$$(C_p/C_v)_{273} = 1{,}035.$$

Bei 13,9° bleibt dann allerdings eine erhebliche Differenz zwischen berechnetem und korrigiertem Widerstande bestehen, die anzuzeigen scheint, daß hier der Widerstand langsamer abfällt, als es der Formel entspricht.

Tabelle 10. Silber: $\Theta_r = 230$; $r_{\text{korr.}} = \dfrac{r_{\text{beob.}} - 0{,}005}{1 - 0{,}005}$

(KAMERLINGH ONNES und CLAY).

T	$r_{\text{ber.}}$	$r_{\text{beob.}}$	$r_{\text{korr.}}$	korr. — ber.
13,9	0,000 9	0,006 9	0,001 9	+ 0,001 0
20,2	0,003 9	0,008 9	0,003 9	±
68,4	0,152	0,155	0,151	− 0,001
77,9	0,193	0,197	0,193	±
89,5	0,243	0,247	0,243	±
133,2	0,428	0,433	0,430	+ 0,002
169,3	0,577	0,581	0,579	+ 0,002
273,1	1,000	1,000	1,000	±
372,9	1,406	1,411	1,413	+ 0,007

10. Kupfer. Hier sind wir wieder in der angenehmen Lage, Beobachtungen zu besitzen, die an sehr reinem Material gemacht sind. Tabelle 11 enthält die von SCHOTT[2]) an einem Kupferkristall und die von MEISSNER[3]) an grobkristallinischem elektrolytischem Kupfer gefundenen Widerstände. MEISSNERs eigener

[1]) H. KAMERLINGH ONNES und J. CLAY, Comm. of Leiden, Nr. 99c, S. 23.
[2]) R. SCHOTT (EUCKEN), Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 27, 1916.
[3]) W. MEISSNER, l. c., S. 1036.

Versuch, die Formel $w \sim T C_p$ zur Darstellung seiner Zahlen anzuwenden, fiel zu Ungunsten der Formel aus. Bei 90,7° war der berechnete Widerstand 6 Proz. zu groß, bei 20,7° war er erheblich zu klein, vor allem aber stimmten hier auch die Temperaturkoeffizienten dr/dT nach Beobachtung und Rechnung gar nicht miteinander überein. Für Θ nahm MEISSNER den aus der Atomwärme folgenden Wert

$$\Theta_c = 320.$$

Tabelle 11. Kupfer: Kristall $\Theta_r = 375$ (R. SCHOTT).

T	$r_{\text{ber.}}$	$r_{\text{beob.}}$	beob. — ber.
20,4	$0{,}0010_0$	$0{,}0012_0$	+ 0,0002
80,4	$0{,}129_4$	0,130	+ 0,0006
273,1	1,000	1,000	±
Kupfer, elektrolytisch, grob kristallinisch: $\Theta_r = 346$ (MEISSNER).			
20,7	$0{,}0013_4$	$0{,}0026_6$	$+ 0{,}0013_2$
90,7	0,187	0,187	±
273,1	1,000	1,000	±
374,7	1,439	1,438	− 0,001

Da sich mir nun bei Durchrechnung der übrigen Metalle Fälle ergeben hatten, in denen der Widerstand sich zwar nicht $\sim T C_p$ erweist, wohl aber $\sim T F(T/\Theta)$ mit einem abweichenden Θ-Wert, so versuchte ich ohne Vorurteil über Θ die Beobachtungen an Kupfer darzustellen und kam dabei zu dem in Tabelle 11 mitgeteilten höchst merkwürdigen Resultat. Formel 2, mit $(C_p/C_v)_{273} = 1{,}026$, vermag in der Tat die Beobachtungen sowohl am Kristall, wie am kristallinischen Material über ein ziemlich großes Temperaturgebiet wiederzugeben, aber nur mit erheblich verschiedenen Θ_r-Werten, die selbst wieder beträchtlich größer sind als Θ_c. Der Widerstand des Kristalls erfordert

$$\Theta_r = 375,$$

der des kristallinischen Kupfers

$$\Theta_r = 346.$$

Dies hat z. B. zur Folge, daß die beiden Kupfersorten, obwohl sicherlich beide sehr rein, doch auf keinen Fall durch Annahme eines konstanten Zusatzwiderstandes aufeinander zurückführbar sind.

Bedauerlicherweise liegen für jede Kupferprobe nur zwei Beobachtungen in tiefer Temperatur vor, so daß ein Urteil über die Größe des durch Mischkristallbildung erzeugten Zusatzwiderstandes nicht mit Sicherheit zu gewinnen ist. Nach den bisherigen Erfahrungen mit Formel 2 zu urteilen, liefert diese, in hoher Temperatur den Beobachtungen angepaßt, in tiefer niemals zu große Widerstände, höchstens zu kleine. Danach möchte ich glauben, daß beim Kupferkristall höchstens ein Zusatzwiderstand von 0,0002 vorhanden ist. Ob ein solcher aber wirklich die Ursache der bei 20,4° bestehenden Differenz ist, oder ob hier eine systematische Abweichung der Formel gegen die Wirklichkeit zum Ausdruck kommt, läßt sich nur durch Messungen bei noch anderen Temperaturen oder auch durch Messung des Temperaturkoeffizienten für den Kristall, etwa nach MEISSNERs Methode, entscheiden. Der von MEISSNER für sein eigenes Kupfer bei 20,7° gefundene Temperaturkoeffizient ist

$$\frac{dr}{dT} = 0{,}000\,165,$$

während aus der Formel für das kristallinische Kupfer folgt 0,000 26, aus der Formel für den Kristall 0,000 20. Diese Zahlen scheinen MEISSNERs Schluß zu bestätigen, daß unsere Formel bei 20° abs. ihre Gültigkeit verloren hat, in dem Sinne, daß der Widerstand langsamer abfällt, als es der Formel entspricht. Andererseits legt die ungefähre Übereinstimmung zwischen dem beobachteten und dem nach der Kristallformel berechneten Temperaturkoeffizienten den Gedanken nahe, ob vielleicht im Gebiet um 20° herum die beiden Kupfersorten einen parallelen Gang des Widerstandes mit der Temperatur angenommen haben und nach der NERNSTschen Regel aufeinander zurückführbar sind. In dem Falle hätte man für das kristallinische Kupfer eine ähnliche Erscheinung wie oben beim Gold, daß nämlich die Frequenz mit sinkender Temperatur zunimmt. Die Entscheidung muß dem Experiment überlassen werden. Jedenfalls scheint mir aber aus dem Beispiel des Kupfers klar hervorzugehen, wie wichtig und erfolgreich gerade die Untersuchung von Metallkristallen ist.

11. Zusammenfassung. Unsere Untersuchung führt also zu folgendem Ergebnis:

Die empirische Beziehung

$$w \sim T \cdot F\left(\frac{T}{\Theta}\right) \cdot \frac{C_p}{C_v}$$

ist für einatomige Metalle in einem weiten Bereich tiefer Temperaturen mit so großer Annäherung zutreffend, daß sie dem wahren Gesetz, welches w als Funktion von T darstellt, nahe verwandt sein muß.

Daß die DEBYEsche Atomwärmenfunktion nicht die wahre Form für die im Widerstandsgesetz auftretende Funktion von T/Θ darstellt, wird dadurch wahrscheinlich gemacht, daß bisweilen selbst für einatomige Metalle, wie Kupfer, die Θ_r-Werte größer ausfallen als die Θ_c-Werte, welch letztere der DEBYEschen Theorie nach bereits Maxima sind und den höchsten im Kristall möglichen Atomfrequenzen entsprechen sollen.

Auch der Faktor C_p/C_v genügt nicht, um in höheren Temperaturen die Formel dem Anstieg des Widerstandes für alle Metalle anzupassen. Er muß durch einen Faktor von allgemeinerer Form ersetzt werden. Immerhin bringt der Faktor C_p/C_v richtig zum Ausdruck, daß mit steigender Temperatur w aufhört, einer Funktion von T/Θ proportional zu sein.

Für eine Gruppe von Metallen, zu denen Zn, Cd, Hg gehört, ist obige Beziehung weniger gut erfüllt. Insbesondere ist für diese Metalle die aus dem Widerstande bestimmte charakteristische Temperatur erheblich niedriger als die für die Atomwärme gefundene.

In extrem tiefen Temperaturen, besonders bei Annäherung an die Temperatur des Überleitendwerdens, fällt der Widerstand langsamer als es der Formel entspricht, wie schon MEISSNER fand.

Ein Kupferkristall und eine Probe kristallinischen Kupfers unterscheiden sich merklich hinsichtlich ihrer charakteristischen Temperatur. Ihre Widerstände lassen sich daher nicht unter der Annahme eines konstanten Zusatzwiderstandes aufeinander zurückführen.

Die Beziehungen des elektrischen Leitvermögens zum periodischen System der Elemente;

von E. Grüneisen.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 8. Februar 1918.)

---

1. Vor einiger Zeit hat C. Benedicks[1]) eine höchst interessante Darstellung der Beziehungen des elektrischen Leitvermögens zum periodischen System der Elemente gegeben. Er weist mit Recht darauf hin, daß über solche Beziehungen bisher wenig bekannt war, was dem Theoretiker eine Handhabe geboten hätte, in das Geheimnis der Elektrizitätsleitung tiefer einzudringen. Erwähnt seien von den älteren, den Gegenstand berührenden Arbeiten die von Joh. Koenigsberger[2]), der ausdrücklich die Eigenschaft der Elemente, Leiter bzw. Isolatoren der Elektrizität zu sein, mit ihrem elektropositiven bzw. elektronegativen Charakter in Verbindung bringt, sowie eine Arbeit von Richarz[3]), in der in gleichem Sinne darauf hingewiesen wird, daß das elektrische Leitvermögen der am stärksten elektropositiven Alkalimetalle, verglichen mit demjenigen anderer Metalle, wenn man es auf die gleiche Anzahl von Atomen bezieht, relativ groß ist.

Um womöglich die Beziehungen der Leitfähigkeit zu anderen physikalischen Eigenschaften des Atoms deutlicher zu gestalten, hat Benedicks, dem Hinweis von Richarz folgend, zunächst einmal für alle Elemente die atomare Leitfähigkeit Λ gebildet, die man erhält, wenn man die spezifische Leitfähigkeit $\varkappa$ durch die Anzahl der g-Atome im Kubikzentimeter dividiert, d. h. durch den Quotienten aus Dichte s und Atomgewicht M:

$$\Lambda = \varkappa \frac{M}{s} = \varkappa v,$$

wo v das Atomvolumen bezeichnet. Die atomare Leitfähigkeit entspricht also dem bei Elektrolyten gebräuchlichen Äquivalentleitvermögen.

---

[1]) C. Benedicks, Jahrb. f. Rad. u. El. **13**, 351, 1916.
[2]) Joh. Koenigsberger, Verh. d. D. Phys. Ges. **9**, 388, 1907.
[3]) F. Richarz, ZS. f. anorg. Chem. **59**, 356, 1908.

Trägt man diese atomare Leitfähigkeit als Funktion des Atomgewichtes auf, so ergibt sich, was ja wegen der Multiplikation mit dem Atomvolumen v nicht überraschend ist, ein Linienzug, der schon wesentlich mehr Ähnlichkeit mit der bekannten Atomvolumenkurve zeigt und damit andeutet, daß Λ eine Größe ist, die deutlichere Beziehungen zu anderen Atomeigenschaften aufweist als $\varkappa$. Immerhin ist das Bild noch in vielen Punkten unklar[1]).

2. Benedicks stellt sich nun weiter vor, daß Elektrizitätsleitung im Metall dadurch zustande kommt, daß die vom Atom am leichtesten abspaltbaren äußeren Elektronen unter Einwirkung des elektrischen Feldes von Atom zu Atom dann übergehen, wenn die Atome zusammenstoßen. Da nun Benedicks Anhänger der Agglomerationshypothese ist, wonach der Abfall der Atomwärme in tiefer Temperatur sich erklären soll aus einer Anhäufung der Atome zu festen Komplexen mit beschränkten Freiheitsgraden, so vermag er auf Grund dieser Hypothese natürlich auch plausibel zu machen, daß das Leitvermögen in tiefer Temperatur zunimmt, weil die Komplexe in sich dauernd „Kontakt“ haben und keinen wesentlichen Widerstand mehr bieten. Worauf es uns hier ankommt, ist aber folgendes. Nach Benedicks soll die Leitung um so besser sein, je häufiger die Atome zusammenstoßen, je größer also die Frequenz der Atome ist. So versucht er den Ansatz

$$\Lambda = C\nu,$$

wo ν die aus der Atomwärme zu bestimmende Frequenz des Atoms und der Faktor C ein Maß sein soll für die „Leichtigkeit, mit der ein Atom Elektrizität aufzunehmen und abzugeben fähig ist“. Benedicks nennt C „elektrische Leitungskapazität“.

Die Frequenzen ν sind für eine große Zahl von Elementen mit größerer oder geringerer Genauigkeit bekannt[2]). Die damit berechneten sogenannten Leitungskapazitäten

$$C = \frac{\Lambda}{\nu} = \frac{\varkappa v}{\nu}$$

zeigen nun eine sehr klare Beziehung zu anderen Eigenschaften des Atoms, besonders zur Valenz und Elektroaffinität. Nach Benedicks gibt es unter den bekannten Kurven, welche eine Atomeigenschaft als Funktion des Atomgewichtes darstellen, keine,

---

1) Näheres siehe bei Benedicks, l. c.

2) Vgl. C. E. Blom, Ann. d. Phys. (4) **42**, 1397, 1913.

welche in so hohem Grade der Anordnung der Elemente im periodischen Schema entspricht, wie es für die C-Kurve der Fall ist.

Dies Resultat ist höchst bemerkenswert im Hinblick auf die jüngst entwickelten Vorstellungen über den Aufbau der Atome aus positivem Kern und Elektronenringen und die daraus abgeleiteten Erklärungen des periodischen Systems, wie sie sich in Arbeiten von KOSSEL[1]) und VEGARD[2]) ausführlich entwickelt finden. VEGARD weist ausdrücklich darauf hin, wie man nach der Theorie des periodischen Systems auch eine Periodizität der Elektrizitätsleitung erwarten könne, in dem Sinne, daß die Leitfähigkeit innerhalb jeder Periode von einem maximalen Werte in der 1. Gruppe des Systems, wo die stärkste Neigung besteht, Elektronen abzuspalten, herabsinken müsse bis zu einem Minimum in der 0. bzw. 8. Gruppe. Da diese Forderung durch die BENEDICKSsche Größe C besser erfüllt wird als durch $\varkappa$ oder Δ, so gewinnt man den Eindruck, daß BENEDICKS mit seiner Definition der Größe C mindestens einen guten Griff getan hat.

Andererseits wird sich mancher, der die Agglomerationshypothese nicht annehmbar findet, schwerlich von den Überlegungen befriedigt fühlen, die zur Definition der Größe C geführt haben. Ganz abgesehen von den atomistischen Voraussetzungen erschien es mir höchst willkürlich, daß BENEDICKS in die Definitionsgleichung für C das Leitvermögen $\varkappa$ einführt, ohne besondere Festsetzungen über die Temperatur zu treffen, bei der es genommen werden soll. Denn wählt man statt der Temperatur des Zimmers oder des Eispunktes, die BENEDICKS wohl zugrunde gelegt hat, eine erheblich tiefere Temperatur, z. B. die des siedenden Wasserstoffs, so wird sich die Reihenfolge der C-Werte vielleicht ganz anders gestalten.

3. Wenn man sich an die im voranstehenden Vortrag gegebenen Darlegungen erinnert, wonach für eine beträchtliche Anzahl von Metallen der elektrische Widerstand, wenigstens in einem ziemlich großen Temperaturgebiet, einer universellen Funktion von T/Θ_r nahe proportional ist, wo Θ_r eine charakteristische Temperatur des Metalles ist, so liegt es auf der Hand, daß der

---

[1]) W. KOSSEL, Ann. d. Phys. (4) **49**, 229, 1916.
[2]) L. VEGARD, Verh. d. D. Phys. Ges. **19**, 344, 1917.

Vergleich der Leitvermögen verschiedener Metalle bei ein und derselben Temperatur T theoretisch bedeutungslos sein wird. Es liegt vielmehr nahe, statt des Proportionalitätszeichens in der erwähnten Beziehung ein Gleichheitszeichen zu setzen und folgende Annahmen zu erproben;

Der spezifische Widerstand in tiefer Temperatur ist gleich einer universellen Funktion von T/Θ_r, multipliziert mit einer temperaturkonstanten Größe.

Spezifische Widerstände bzw. Leitvermögen verschiedener Metalle sind nur bei solchen Temperaturen vergleichbar, die zur charakteristischen Temperatur Θ_r in einem konstanten Verhältnis stehen.

Diese Festsetzungen nun führen zu einer im weiteren völlig hypothesenfreien und sehr einfachen Deutung der Benedicksschen sogenannten Leitungskapazität. Zunächst haben wir nämlich die im vorstehenden Aufsatz behandelte empirische Beziehung

$$w \sim TF(T/\Theta_r),$$

wo F die von Debye für die Atomwärme abgeleitete Funktionsform ist und der Faktor C_p/C_v fortgelassen ist, jetzt als Gleichung zu schreiben:

$$w = \text{const.} \left(\frac{T}{\Theta_r}\right) F \left(\frac{T}{\Theta_r}\right),$$

oder, indem wir noch das Atomvolumen aus der Konstante absondern, um mit Benedicks das atomare Leitvermögen bilden zu können und mit C' eine neue wesentlich temperaturkonstante Größe bezeichnen:

$$w = \frac{v}{C'} \left(\frac{T}{\Theta_r}\right) F \left(\frac{T}{\Theta_r}\right). \tag{1)}$$

Hieraus folgt für das atomare Leitvermögen:

$$\varLambda = \frac{C' \Theta_r}{T . F(T/\Theta_r)}.$$

Vergleichen wir jetzt erstens die $\varLambda$ verschiedener Metalle bei solchen Temperaturen, die in einem konstanten Verhältnis ϱ zur charakteristischen Temperatur Θ_r stehen — wir wollen sie kurz korrespondierende Temperaturen nennen —, so ergibt sich

$$\varLambda_\varrho = \frac{C'}{\varrho F(\varrho)}.$$

Die Konstanten C' verschiedener Metalle verhalten sich wie die atomaren Leitfähigkeiten bei korrespondierenden Temperaturen. C' kann, wenn etwa die Funktion F dimensionslos gemacht wird, gleichgesetzt werden der atomaren Leitfähigkeit bei derjenigen Temperatur, für welche $\varrho F(\varrho) = 1$ ist.

Vergleichen wir zweitens die Λ verschiedener Metalle bei ein und derselben Temperatur T_0, die jedoch so hoch gelegen sei, daß die DEBYEsche Funktion F bis auf einen geringen Rest ihren Grenzwert angenommen hat, so besitzt $T_0 F(T_0/\Theta_r)$ nahe denselben Wert für die verschiedenen Metalle, und die atomaren Leitfähigkeiten Λ_0 werden nahe proportional $C'\Theta_r$ bzw. $C'\nu$ und daher angenähert

$$C' \sim \frac{\Lambda_0}{\nu}.$$

Der rechtsstehende Quotient ist aber genau die von BENEDICKS mit C bezeichnete und Leitungskapazität genannte Größe. Wir finden also, daß dieses C, wenn es wie von BENEDICKS bei einer relativ hohen Temperatur gebildet wird, unserer Konstante C', d. h. der atomaren Leitfähigkeit bei korrespondierenden Temperaturen nahe proportional ist. Also müßte die von BENEDICKS für C gefundene Periodizität mit dem Atomgewicht auch für C' gelten.

Bedingung für die Parallelität zwischen C' und C ist allerdings, daß die von BENEDICKS benutzten Frequenzen nicht allzu verschieden sind von denen, die wir für den Widerstand charakteristisch gefunden haben. Wo der Unterschied der Frequenzen bzw. der Θ groß ist, kann die Reihenfolge der Konstanten C' und C verschieden sein. Es ist also notwendig, die Periodizität der Konstanten C' noch einmal zu prüfen.

4. Das Ergebnis dieser Prüfung sei hier vorweggenommen. Es läßt sich in den Satz zusammenfassen:

Die atomare Leitfähigkeit bei korrespondierenden Temperaturen ist im wesentlichen eine periodische Funktion des Atomgewichtes, derart, daß sie von maximalen Werten in der 1. Gruppe des periodischen Systems zu minimalen Werten in der 0. bzw. 8. Gruppe abfällt.

Es ist selbstverständlich, daß dieser Satz sich auf solche Elemente beschränken muß, bei denen von einer charakteristischen Temperatur gesprochen werden kann, bei denen also der Wider-



stand in tiefer Temperatur sich nach dem in Gleichung 1) ausgedrückten Gesetz[1]) ändert. Eine entsprechende Einschränkung gilt aber zweifellos auch für BENEDICKS' Leitungskapazität, deren Definition nur dann eindeutig ist, wenn die Atomwärme durch eine Frequenz darstellbar ist.

Die Prüfung des oben ausgesprochenen Satzes hat in der Weise zu erfolgen, daß man den spezifischen Widerstand jedes Elementes als Funktion der Temperatur, und zwar bis zu möglichst tiefen Temperaturen hin, mißt und zusieht, ob die Funktion durch Gleichung 1) wiedergegeben wird. Alsdann hat man für alle Elemente, bei denen dies der Fall ist, die atomaren Leitfähigkeiten bei irgend einer korrespondierenden Temperatur $\varrho\Theta_r$, welche im Inneren des Gültigkeitsbereiches der Gleichung 1) liegt, zu berechnen und die gewonnenen Zahlen in das periodische System der Elemente einzusetzen.

Für die Metalle Pb, Cd, Zn, Hg, Au, Pt, Ag, Cu habe ich in der vorstehenden Mitteilung die erforderlichen Grundlagen gegeben. Wesentlich unsicherer ist das, was man bisher über die anderen Elemente sagen kann.

Für die Alkalimetalle haben GUNTZ und BRONIEWSKI[2]) einerseits, HACKSPILL[3]) andererseits den spezifischen Widerstand bis zur Temperatur der flüssigen Luft hinab gemessen. Die Zahlen von HACKSPILL dürften zuverlässiger sein. Das Zahlenmaterial steht nicht im Widerspruch mit der Annahme, daß die Alkalimetalle sich verhalten wie die einatomigen Metalle Pb, Au, Pt, Ag, d. h. daß ihr Widerstand nach Gleichung 1) mit der Temperatur abfällt, und daß die charakteristischen Temperaturen Θ_r annähernd übereinstimmen mit den für die Atomwärme[4]) charakteristischen Θ_c. Nur für Na scheint $\Theta_r > \Theta_c$. Ich wählte

	Li	Na	K	Rb	Cs
$\Theta_r =$	430	240	112	68	54

Die beiden letzten Zahlen sind aus der LINDEMANNschen Schmelzpunktsformel abgeleitet.

---

[1]) Sollte sich später eine andere Funktionsform an Stelle von F als richtiger erweisen, so ändert sich an obigem nichts.

[2]) A. GUNTZ und W. BRONIEWSKI, C. R. **147**, 1474, 1908; **148**, 204, 1909.

[3]) L. HACKSPILL, C. R. **151**, 305, 1910.

[4]) F. KOREF, Ann. d. Phys. (4) **36**, 49, 1911; Phys. ZS. **13**, 183, 1912. E. H. und EZER GRIFFITHS, Proc. Roy. Soc. London (A) **90**, 557, 1914.

Nicht allzu verschieden werden ferner die charakteristischen Temperaturen für Widerstand und Atomwärme sein[1]) bei

	Mg	Pd	Rh	W	Ir	Tl
$\Theta_r =$	300	284	390	320	283	100

während für

	Al	Fe
$\Theta_r =$	430[2])	470[3])

also $\Theta_r > \Theta_c$, für

	Sn
$\Theta_r =$	150[4])

also wohl $< \Theta_c$ ist. Beim Sn ist außerdem die Gültigkeit der Formel 1 ähnlich mangelhaft wie für Cd (vgl. vorstehende Mitteilung), so daß auch für das nicht regulär kristallisierende Sn die Zugehörigkeit zur Gruppe Zn, Cd, Hg geschlossen werden darf.

Für Ca, Sr, Ga, In, Ta, Cr, Mo, Mn liegen meines Wissens überhaupt keine Widerstandsmessungen in tiefer Temperatur vor. Es blieb hier nur übrig, wollte man eine orientierende Übersicht gewinnen, die Gültigkeit unserer Formel anzunehmen und als charakteristische Temperaturen die aus der Atomwärme folgenden zu benutzen. Auch diese mußten zum größten Teile aus den bekannten Formeln, teils Schmelzpunktsformel, teils Ausdehnungskoeffizientenformel, berechnet werden. Die Zahlen in umstehender Tabelle müssen daher zum großen Teil als sehr unsicher bezeichnet werden und sind zum Zeichen dessen kleiner gedruckt.

---

[1]) Es wurden orientierende Rechnungen zur Prüfung von Gleichung 1) vorgenommen auf Grund der Beobachtungen von Dewar und Fleming an Mg, Pd, Tl, von Broniewski und Hackspill an Rh, von Henning an W. Leider reichen die Messungen nur bis zur Temperatur der flüssigen Luft hinab, beziehen sich außerdem zum Teil auf ziemlich unreines Material, so daß eine sichere Θ_r-Bestimmung nicht möglich ist. Obige Zahlen sind zum Teil aus der Atomwärme (Mg, Tl), zum Teil aus dem Ausdehnungskoeffizienten (Pd, Ir), zum Teil aus dem Widerstand (Rh, W) abgeleitet. — J. Dewar und J. A. Fleming, Phil. Mag. (5) **36**, 271, 1893; W. Broniewski und L. Hackspill, C. R. **153**, 814, 1911; W. Nernst und F. Schwers, Berl. Ber. 1914, 355. Die Messungen an W verdanke ich mündlicher Mitteilung des Herrn Henning.

[2]) Erhalten aus den Beobachtungen von Dewar und Fleming, l. c., bei Annahme eines Zusatzwiderstandes von 9 Proz. des Wertes bei 273°.

[3]) Erhalten aus den Zahlen von H. Schimank, Ann. d. Phys. (4) **45**, 706, 1914, sowie aus denen von Dewar und Fleming.

[4]) H. Kamerlingh Onnes und G. Holst, Comm. of Leiden, Nr. 142a.

Tabelle 1.

Die Zahlen der Tabelle, mit 10^4 multipliziert, geben das atomare elektrische Leitvermögen in $(\Omega^{-1}\,cm^2)$ bei $T = {}^1/_2\,\Theta_r$.

0	VIII	I	II	III	IV	V	VI	VII
		H						
He		Li 190	Be	B	C	N	O	F
Ne		Na 1500	Mg 720	Al 590	Si	P	S	Cl
A		K 5000	Ca 1000	Sc	Ti	V	Cr 360	Mn 240
	Fe 104 Co Ni	Cu 740	Zn 620	Ga 120	Ge	As	Se	Br
Kr		Rb 6600	Sr 640	Y	Zr	Nb	Mo 320	—
	Ru Rh 270 Pd 200	Ag 1900	Cd 1100	In 1100	Sn 800	Sb 190	Te	J
X		Cs 4800	Ba	La u. a.	Ce u. a.	Ta 210	W 370	—
	Os Ir 400 Pt 260	Au 1750	Hg 980	Tl 720	Pb 730	Bi	Po	—
Ra-Em		—	Ra	Ac	Th		U	

In Tabelle 1 [1]) habe ich unter das Zeichen des Elements die atomare Leitfähigkeit bei der Temperatur $T = {}^1/_2\,\Theta_r$ eingetragen, d. h. bei einer Temperatur, die tief genug ist, damit Formel 1) gilt. Das so entstehende Zahlenbild entspricht fast vollständig der Zeichnung von BENEDICKS für seine Leitungskapazität C. Verbessert erscheint bei uns die Zahl für Quecksilber, das bei BENEDICKS wegen der höher angenommenen Frequenz ein kleineres C hat als Tl und Pb. Fast ausnahmslos sinkt in jeder Horizontalreihe das atomare Leitvermögen bei $T = {}^1/_2\,\Theta_r$ von einem Maximum in Gruppe 1 zu einem Minimum in Gruppe 0 bzw. 8, entsprechend der sinkenden Fähigkeit zur Abspaltung eines Elektrons. Ausnahmen scheinen Ga, Ta — für die aber die Zahlen sehr unsicher sind —, Sb und Bi zu sein, die beiden letztgenannten wahrscheinlich im Zusammenhang mit ihrer Mehratomigkeit im festen Zustande.

Es ist bemerkenswert, daß Ausnahmen nur in dem Sinne vorzukommen scheinen, daß das Leitvermögen gegenüber dem zu erwartenden herabgedrückt ist.

Es ist ja sehr wohl möglich, daß sich bei weiterer experimenteller Durchforschung des Gebietes tiefer Temperaturen noch weitere Ausnahmen finden, sowohl hinsichtlich der Gültigkeit unserer Formel, als auch hinsichtlich der Einordnung in das Zahlensystem von Tabelle 1. Es fragt sich, ob dieses damit an Bedeutung verliert. Ich möchte das nicht glauben. Die Ordnung der Leitfähigkeitszahlen nach der Elektroaffinität bzw. Valenz ist doch zu auffallend, um nur zufällig zu sein. Ausnahmen würden vielmehr, wie ich glaube, als Andeutungen dafür aufzufassen sein, daß die betreffenden Elemente nicht die gleiche Struktur haben wie die Mehrzahl der Metalle.

5. Das Ergebnis dieser Mitteilung möchte ich dahin zusammenfassen:

Die von BENEDICKS gegebene Definition einer „atomaren Leitungskapazität“ erscheint unzweckmäßig, weil die nach ihr gebildete Reihenfolge der Elemente sich mit der Temperatur ändern kann.

Die von BENEDICKS gefundene Beziehung zum periodischen System der Elemente besteht jedoch für die atomaren Leitfähig-

---

[1]) Anordnung der Elemente nach FAJANS, Naturwissenschaften 2, 465, 1914.

keiten bei korrespondierenden Temperaturen bzw. für die Konstanten C' der Formel

$$w = \frac{v}{C'} \frac{T}{\Theta_r} F\left(\frac{T}{\Theta_r}\right).$$

Als korrespondierende Temperaturen werden solche bezeichnet, welche zur charakteristischen Temperatur Θ_r in einem konstanten Verhältnis stehen.

Die atomaren Leitfähigkeiten bei korrespondierenden Temperaturen ändern sich im wesentlichen periodisch mit dem Atomgewicht, derart, daß sie von maximalen Werten in der 1. Gruppe zu minimalen in der 0. bzw. 8. Gruppe abfallen.

Nachtrag bei der Korrektur. Den letzten Satz oben kann man als eine empirisch gefundene Tatsache ansehen, die von der in Gleichung 1) formulierten Festsetzung unabhängig ist. Letztere gibt jedoch die einfachste Erklärung dafür, daß die Benedicksschen Leitungskapazitäten fast dieselbe Zahlenreihe bilden, wie die atomaren Leitfähigkeiten bei korrespondierenden Temperaturen.

Die Einführung korrespondierender Temperaturen wird sich vermutlich auch für das Verhältnis von Wärmeleitfähigkeit λ zu elektrischer Leitfähigkeit $\varkappa$ als bedeutungsvoll erweisen. Wenigstens zeigen Meissners Beobachtungen, daß für Pb, Au, Pt, Cu bei korrespondierenden Temperaturen (z. B. Θ, $^1/_2\,\Theta$, $^1/_4\,\Theta$) die Werte für $\lambda/\varkappa T$ im ganzen bessere Übereinstimmung zeigen, als bei gleicher absoluter Temperatur. In tieferen Temperaturen werden diese einfachen Verhältnisse, wohl durch den Einfluß der Kristalleitfähigkeit für Wärme, verschoben.

Über die Bestimmung der Elastizitätsgrenze;
von O. Lehmann.

(Eingegangen am 14. Februar 1918.)

Die Elastizitätsgrenze ist die größte Schubkraft pro Flächeneinheit der im Abstande 1 befindlichen Gleitflächen, welche ein Stoff zu ertragen vermag, ohne daß bleibendes, mit der Zeit fortschreitendes Gleiten (Fließen) eintritt. Nur feste Körper besitzen eine Elastizitätsgrenze, Flüssigkeiten können definiert werden als Körper, deren Elastizitätsgrenze Null ist[1]). Von ganz besonderer Wichtigkeit ist deshalb die Bestimmung der Elastizitätsgrenze für den Nachweis der Existenz flüssiger Kristalle. Bei manchen Kristallen (z. B. bei dem regulären Ammoniumnitrat) ist bisher wegen Mangels der Bestimmung der Elastizitätsgrenze unklar, ob sie zu den weichen festen Kristallen oder zu den zähflüssigen flüssigen zu rechnen sind[2]).

Ein Kristall muß, wie die Untersuchungen über die Gesetze der polyedrischen Form, der optischen und sonstigen Anisotropie, insbesondere aber über die Interferenzen der Röntgenstrahlen ergeben haben, als regelmäßige Anordnung von Molekülen oder Atomen betrachtet werden. Zur Erklärung des elastischen Verhaltens ist es notwendig, den Kristallmolekülen Richtkräfte (Kräftepaare) zuzuschreiben[3]). Die neue „Atomgruppierungstheorie" [4]) glaubt allerdings mit Zentralkräften auskommen zu können, die sie mit den chemischen Wertigkeiten identifiziert, indeß werden auch diese zu Richtkräften, wenn die Atome nicht als punktförmig aufgefaßt werden. Wird das Raumgitter verbogen, so ist das Kräftegleichgewicht gestört und kann nur durch Zufügung

---

[1]) O. Lehmann, Flüssige Kristalle 1904, S. 86.

[2]) Derselbe, Ann. d. Phys. (4) **50**, 576, 1916. Phys. ZS. **19**, 76, 1918.

[3]) Poisson, Mém. de l'Acad. de Paris 8, 357, 1828. W. Voigt, Abh. d Gött. Akad. **34**, 1, 1887.

[4]) W. H. und W. L. Bragg, ZS. f. anorg. Chem. **90**, 153, 1913. P. Groth, ZS. f. Kristallogr. **54**, 65, 1914. F. Rinne, ZS. f. anorg. Chem. **96**, 317, 1916. Die Naturwissenschaften 1916, Nr. 17, 18; 1917, Nr. 4. W. Voigt, Physik. ZS. **17**, 161, 1916.

äußerer Kräfte wieder hergestellt werden, d. h. es tritt eine der Deformation entsprechende elastische Gegenkraft auf, die durch die äußeren Kräfte kompensiert werden muß. Wird ein zu einem Ring gebogener Kristall in die genau passende Höhlung einer starren Form eingezwängt[1]), so verhält sich deshalb der Kristall wie eine zusammengebogene Feder, er übt einen Druck auf die Form aus. Ist die Elastizitätsgrenze bei der Biegung nicht überschritten worden, so bleibt diese elastische Spannung immer gleich und beim Herausnehmen aus der Form streckt sich der Kristall sofort wieder zu normaler Form und Struktur aus. Im gegenteiligen Falle tritt allmählich Erschlaffung (Relaxation) ein, die Spannung geht nach mehr oder minder langer Zeit auf das der Elastizitätsgrenze entsprechende Maß zurück, welches sodann beliebig lange Zeit erhalten bleibt.

Die Erschlaffung ist vermutlich dadurch bedingt, daß einzelne der Kristallmoleküle, ohne ihre Lage wesentlich zu ändern, infolge der Wärmebewegung in etwas andere Lage zu ihren Nachbarn gekommen sind, und zwar in eine solche, welche einer Verminderung der potentiellen Energie, d. h. der Spannung, entspricht. Beim Wiederausstrecken des Kristalls können sie ihre normale Stellung nicht wieder erreichen, so daß das Raumgitter dauernd gestört bleibt. Immer handelt es sich aber nur um einzelne Moleküle, die unter dem Zwang gewissermaßen nachgeben; niemals, auch nicht bei unendlich langer Dauer des Zwanges, kann die Spannung unter die Elastizitätsgrenze sinken, weil die molekularen Richtkräfte immer in unverminderter Stärke bestehen bleiben und die Raumgitterstruktur (wegen Mitwirkung der äußeren Kräfte in der gestörten Form) aufrecht zu erhalten suchen. Durch Messung der nach sehr langer Dauer des Versuches noch übrigen Spannung, die sich nach dieser Vorstellungsweise asymptotisch einem bestimmten Grenzwert nähern müßte, könnte man also ein Maß der Elastizitätsgrenze erhalten. Die experimentelle Durchführung stößt aber auf Schwierigkeiten.

An früherer Stelle habe ich deshalb ein anderes Verfahren angegeben. Der zu untersuchende Körper wird in die Form einer Platte gebracht, die man auf Quecksilber schwimmen läßt und mittels einer in der Mitte senkrecht befestigten Achse ver-

[1]) O. Lehmann, Ann. d. Phys. (4) **50**, 597, Fig. 6, 1916.



drillt, während der Umfang festgehalten wird. Vor der Torsion auf die Platte aufgezeichnete radiale Striche müßten, falls eine Elastizitätsgrenze existiert, vom Rande gegen die Mitte fortschreitend da, wo die Kraft der Elastizitätsgrenze entspricht, eine Knickung zeigen und von da erst gegen die Achse zu sich spiralig zusammenwinden, um so mehr, je länger der Versuch dauert[1]. Auch diese Methode hat sich indeß praktisch nicht bewährt, so daß nach einer anderen gesucht werden mußte. Eine solche glaube ich gefunden zu haben in der Schrumpfung einer Hohlkugel durch allseitigen Druck, während in dem Hohlraum Vakuum erhalten wird oder durch Verbindung mit der äußeren Luft Atmosphärendruck. Der allseitige Druck kann z. B. durch Wasser erzeugt werden. Stellt man sich zunächst eine nur sehr dünne Hohlkugel vor, die außen einem die Elastizitätsgrenze nicht übersteigenden Druck ausgesetzt wird, so wird sie etwas zusammenschrumpfen, bis die geweckte elastische Gegenkraft dem äußeren Drucke das Gleichgewicht hält. Würde man nun die Schrumpfung verhindern wollen, indem man im Inneren, dicht anschließend, eine zweite Hohlkugel anbrächte, so würde die erste auf diese einen Druck ausüben, der aber nur im ersten Moment gleich dem äußeren Druck wäre, der sich mit Schallgeschwindigkeit von außen nach innen fortpflanzt, sobald er außen angelegt wird. Beide Kugeln werden nun etwas schrumpfen, die erste natürlich etwas weniger als im ersten Falle, immerhin aber so, daß eine elastische Gegenkraft entsteht, die den Druck auf die zweite Kugel vermindert. Würde man ebenso in dieser als Stütze eine dritte Hohlkugel anbringen, so wäre der Druck auf diese noch kleiner, da nun auch der Gegendruck der zweiten Kugel abgerechnet werden muß usw. Gleichen Erfolg hätte die Vermehrung der Dicke der Hohlkugel. Ist dieselbe genügend groß, so wird die Summe der elastischen Gegendrucke dem äußeren Drucke gleich werden, ohne daß eine Schrumpfung der inneren Oberfläche eintritt. In diesem Falle könnte man auch das ganze Innere mit demselben Stoff ausfüllen.

Bei einer massiven Kugel gibt es also einen kugelförmigen Kern, in welchen hinein der äußere Druck sich nicht fortpflanzt, und es wird sich in der Verteilung der elastischen

[1]) O. Lehmann, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 413, Fig. 1, 1913.

Spannungen nichts ändern, wenn man diesen Kern herausnimmt. Würde man auf die äußerste Hohlkugel eine weitere aufbringen, welche einem vergrößerten Druck ausgesetzt wird, der vermindert um die elastische Gegenkraft der neuen Hohlkugel den früheren Druck auf diese ergibt, so würde natürlich alles ungeändert bleiben. Ebenso könnte man eine zweite, dritte Hohlkugel mit immer mehr vergrößertem Druck aufbringen, oder man könnte einfach die Dicke der massiven Kugel vergrößern. Je mehr dieselbe steigt, um so mehr wird man den äußeren Druck steigern können, ohne daß eine Fortpflanzung desselben in den druckfreien Kern stattfindet. Ein ähnlicher Fall wäre der, daß in einem hohen Gebirge ein Tunnel gebohrt wird. Trotz der Größe des Gebirgsdruckes ist ein Zusammenschrumpfen des Tunnels nicht zu befürchten, falls nirgendwo der Druck die Elastizitätsgrenze des Gesteins übersteigt.

Falls nun bei einer elastischen Hohlkugel der äußere Druck größer gemacht wird als die Elastizitätsgrenze, so erleidet dieselbe eine bleibende, mit der Zeit fortschreitende Schrumpfung. Der Druck auf eine innen angebrachte zweite Hohlkugel wird also mit der Zeit steigen, bis auch bei dieser die Elastizitätsgrenze überschritten wird usw. Da aber bei jeder der ineinandergeschachtelten Hohlkugeln der Druck sich um die der Elastizitätsgrenze entsprechende elastische Gegenkraft vermindert, wird man zu einer Grenze kommen, wo eine bleibende Schrumpfung nicht mehr eintritt, und von dieser Grenze ab bis zur Mitte sind die Verhältnisse dieselben wie im vorigen Fall. In einer massiven Kugel, welche von außen einem die Elastizitätsgrenze übersteigenden Druck ausgesetzt wird, hat man also zwei durch die Elastizitätsgrenze des Materials bestimmte ausgezeichnete Kugelflächen, von welchen die größere das Gebiet abgrenzt, in welchem nur vollkommen elastische Verschiebungen vorkommen, die kleinere den Kern, in welchen hinein der Druck sich nicht fortpflanzt. Letzterer kann auch in diesem Falle herausgenommen werden, ohne daß das Gleichgewicht gestört wird; ebenso wird ein Tunnel von einer Zone umgeben sein, in welcher die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird, so daß ein allmähliches Zusammenschrumpfen des Tunnels nicht eintreten kann.

Höhlt man die Kugel über die Grenze der vollkommenen Elastizität aus, so wird sie unter Einfluß des äußeren Druckes



bleibend zusammenschrumpfen, bei großer innerer Reibung erst nach sehr langer Zeit, bis die Höhlung die Größe des druckfreien Kernes erreicht hat. Weiteres Zusammenschrumpfen ist nicht möglich, falls überhaupt eine Elastizitätsgrenze existiert, d. h. falls der Stoff nicht zu den zähen pechartigen Flüssigkeiten gehört. Je größer der äußere Druck, um so kleiner wird die übrig bleibende Höhlung sein; ist aber keine Elastizitätsgrenze vorhanden, so wird auch bei kleinsten Drucken bei hinreichend langer Einwirkung die Höhlung völlig verschwinden, vorausgesetzt, daß sie wirklich leer und nicht etwa mit Luft angefüllt war.

Ist die Kugel aus einem homogenen Kristall hergestellt, so wird sie wegen Verschiedenheit der Elastizitätsgrenze nach verschiedenen Richtungen bei der Schrumpfung eine entsprechend veränderte Form annehmen. Eine kristallinische Masse, wie z. B. Wachs, wird wegen der verschiedenen Orientierung der einzelnen Kriställchen, falls sie ursprünglich glatt war, rauh werden. Immerhin wird man durch die einfache Beobachtung, ohne Herstellung eines Vakuums im Innern, ob sie bei lang andauerndem Flüssigkeitsdruck nicht so weit zusammenschrumpft, bis der Druck der eingeschlossenen Luft dem äußeren Drucke gleich wird, feststellen können, ob sie eine Elastizitätsgrenze besitzt oder nicht, und diese so gefundene Elastizitätsgrenze wird, da das Wachs aus verschiedenen Substanzen besteht, demjenigen Stoff zuzuschreiben sein, welcher die kleinste Elastizitätsgrenze hat.

Befindet sich Vakuum in der Kugel, so wird man auf das Vorhandensein einer Elastizitätsgrenze, also auf festen Zustand, schließen können, wenn auch bei langandauerndem hohen Druck der Hohlraum nicht ganz verschwindet. Bei immer mehr zunehmendem Druck wird der nach sehr langer Zeit noch übrige Hohlraum immer kleiner werden, er muß sich aber *asymptotisch einem bestimmten Minimalwert nähern*, der von der Höhe der Elastizitätsgrenze abhängt, da er selbst für unendlich hohen Druck nicht verschwinden kann.

Auch nach diesem Verfahren würden also langdauernde (wenn auch nicht säkulare) Versuche nötig sein, um Zahlenwerte für die Elastizitätsgrenze zu finden; man kann aber ohne solche mit Sicherheit schließen, daß *eine Elastizitätsgrenze nicht vorhanden*, der Körper somit *flüssig* ist, wenn überhaupt, gleichviel unter welchen Bedingungen, der *Hohlraum völlig verschwindet*.



An Stelle einer Kugel wird man auch einen langen Zylinder nehmen können oder einen Ring, welcher zwischen parallelen Glasplatten eingeschlossen ist. Der Raum zwischen denselben müßte etwa durch einen abgedichteten Metallring abgeschlossen und durch eine Kapillarröhre mit einer Druckpumpe verbunden werden. Ebenso müßte der Hohlraum des Ringes etwa mittels einer in der Mitte der einen Glasplatte eingeführten Kapillare mit einer Luftpumpe verbunden werden. Ist die Substanz flüssig-kristallinisch und der Zwischenraum zwischen den beiden Glasplatten hinreichend dünn, so wird man zwischen gekreuzten Nicols auch die radiale Strömung verfolgen können, wobei sich allerdings keine einheitliche Struktur ergeben kann, da, wie schon früher ausgeführt [1]), infolge von Stauchung und Dehnung, speziell bei Ammoniumchlorhydrat, zahlreiche konische Störungen auftreten müssen, bei Bromphenanthrensulfosäurehydrat [2]) Zwillingsbildungen und Fächerstrukturen.

Zu solchen Versuchen verwende ich einen runden, in der Mitte fein durchbohrten Objektträger von 6,5 cm Durchmesser, auf welchem sich das Präparat wie sonst unter einem flachen, mit der konvexen Seite aufgelegten Uhrglas befindet. Durch Metallringe und aufgepreßte, mit paraffiniertem Papier gedichtete Glasplatten ist über und unter dem Objektträger je eine Kammer hergestellt, von welcher abwechselnd die eine und die andere mit einem Behälter mit verdichteter bzw. verdünnter Luft verbunden wird. Infolge des Eintretens erzwungener Homöotropie und wegen Anisotropie der inneren Reibung verlaufen die Stromlinien nicht (wie bei einer amorphen Masse) radial.

Bei leichtflüssigen Kristallen genügt natürlich schon der Oberflächenspannungsdruck, den Hohlraum zum Verschwinden zu bringen. Dieser Druck müßte auch in anderen Fällen zu dem äußeren Druck hinzugerechnet werden.

---

[1]) O. Lehmann, Ann. d. Phys. (4), 48, 744, 1915.

[2]) Derselbe, ebenda 1918 (im Druck).

Verhandlungen

der

Deutschen Physikalischen Gesellschaft

Im Auftrage der Gesellschaft herausgegeben

von

Karl Scheel

20. Jahrg. **30. Juni 1918.** **Nr. 9/12.**

Sitzung vom 26. April 1918.

Vorsitzender: Hr. A. EINSTEIN.

Festsitzung aus Anlaß des 60. Geburtstages von Hrn. M. PLANCK.

Es wurden folgende Vorträge gehalten:

Hr. **E. Warburg:** Begrüßungsansprache.
Hr. **M. v. Laue:** PLANCKs thermodynamische Arbeiten.
Hr. **A. Sommerfeld:** Strahlungs- und Quantentheorie.
Hr. **A. Einstein:** PLANCK als wissenschaftliche Persönlichkeit.

Sitzung vom 10. Mai 1918.

Vorsitzender: Hr. A. EINSTEIN.

Vor Eintritt in die Tagesordnung macht der Vorsitzende Mitteilung von dem Ableben der Mitglieder der Gesellschaft

Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. **Max B. Weinstein,**
† 25. März 1918,

Prof. Dr. **Ferdinand Braun,**
† 20. April 1918.

Die Anwesenden ehren das Andenken der Entschlafenen durch Erheben von ihren Sitzen.

Der Rechnungsführer Hr. **E. Jahnke** berichtet über Einnahmen und Ausgaben der Gesellschaft im Jahre 1917 und legt die weiter unten abgedruckte Vermögens-Bilanz sowie die Übersicht des Gewinn- und Verlust-Kontos der Gesellschaft vor. Ein Antrag der Revisoren, der Herren O. KRIGAR-MENZEL und M. BORN, die Entlastung zu erteilen, wird angenommen.

Der Haushaltungsplan für das Kalenderjahr 1918 wird nach den Vorschlägen des Vorstandes und Beirats festgesetzt.

Aus den nun folgenden Wahlen gehen der Vorstand und der Beirat wie folgt hervor:

Hr. MAX WIEN, Vorsitzender.
Hr. H. RUBENS, Hr. E. WARBURG, Hr. M. PLANCK, Hr. F. HABER, Hr. W. NERNST, Hr. A. EINSTEIN, Hr. H. BOAS, Hr. E. GOLDSTEIN, } Beisitzer.
Hr. E. JAHNKE, Rechnungsführer.
Hr. A. KOEPSEL, stellvertretender Rechnungsführer.
Hr. KARL SCHEEL, Schriftführer.
Hr. W. WESTPHAL, stellvertretender Schriftführer.
Hr. O. KRIGAR-MENZEL, Hr. M. BORN, } Revisoren.
Hr. G. HERTZ, Bibliothekar.
Hr. F. KIEBITZ, stellvertretender Bibliothekar.
Hr. R. ASSMANN, Hr. KARL SCHEEL, } Redakteure der „Fortschr. d. Physik“,
letzterer zugleich Redakteur der „Verhandlungen“ der Gesellschaft.

In den Wissenschaftlichen Ausschuß werden gewählt:

Hr. P. DEBYE,
Hr. H. DIESSELHORST,
Hr. J. ELSTER,
Hr. H. GEITEL,
Hr. W. KOHLRAUSCH,
Hr. G. LEITHÄUSER,
Hr. J. PRECHT,
Hr. KARL SCHEEL,
Hr. W. VOIGT,
Hr. B. WALTER.

Zum Vorsitzenden des Wissenschaftlichen Ausschusses wird nach § 17 (drittletzter Absatz) der Satzungen vom Beirat in Gemeinschaft mit dem Vorstande Hr. F. HIMSTEDT gewählt.

Die Sitzungstage der Gesellschaft werden für das Vorstandsjahr 1918/19 folgendermaßen festgesetzt:

Im Jahre 1918:	Mai:	Freitag,	den	10. u. 31.
	Juni:	„	„	14. u. 28.
	Juli:	„	„	12. u. 26.
	November:	„	„	1., 15. u. 29.
	Dezember:	„	„	13.
1919:	Januar:	„	„	10. u. 24.
	Februar:	„	„	7. u. 21.
	März:	„	„	7.
	April:	„	„	25.
	Mai:	„	„	9. u. 23.

Sodann berichtet Hr. **W. Schottky:**

Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern.

Als Mitglieder wurden in die Gesellschaft aufgenommen:

Hr. Dr. LUDWIG FLAMM, Privatdozent für Physik an der k. k. Universität und der k. k. Technischen Hochschule, Wien VIII/2, Lerchenfelderstraße 122.

Hr. Privatdozent Dr. ALFONS KLEMENC, Universitätsassistent, Wien IX, Wasagasse 9.

Hr. Prof. Dr. HEINRICH MACHE, Wien, Technische Hochschule.

(Sämtlich vorgeschlagen durch Hrn. JOSEPH RITTER VON GEITLER.)

Hr. Oberingenieur Dr. ing. REINHOLD RÜDENBERG, Charlottenburg 9, Kastanienallee 27.

(Vorgeschlagen durch Hrn. F. KRÜGER.)

Frl. HILDEGARD MIETHING, Charlottenburg 2, Berlinerstraße 37/38, Viktoriastudienhaus.

(Vorgeschlagen durch Hrn. M. PIRANI.)

Hr. Dr. FRITZ GERB, Berlin W. 15, Uhlandstraße 161.

(Vorgeschlagen durch Hrn. V. PIECK.)

Sitzung vom 31. Mai 1918.

Vorsitzender: Hr. A. EINSTEIN.

Anstelle von Hrn. M. WIEN, der wegen Überlastung mit militärischen Dienstgeschäften das Amt des Vorsitzenden nicht übernehmen kann, wird Hr. A. SOMMERFELD zum Vorsitzenden der Gesellschaft gewählt.

Sodann berichtet Hr. **W. Westphal**
über das Atommodell von NIELS BOHR.

Endlich trägt Hr. **G. Berndt** vor über die
Untersuchung der Zerlegung von Sprengkörpern.

Als Mitglieder wurden in die Gesellschaft aufgenommen:

Hr. Dr. HANS THIRRING, Privatdozent an der Universität, Wien II, Ausstellungsstraße 11.
(Vorgeschlagen durch Hrn. A. EINSTEIN.)

Hr. cand. phil. GOTTLIEB SAURER, Ringoldswil, Thunersee, Schweiz.
(Vorgeschlagen durch Hrn. M. WOLFKE.)

Hr. Dr. phil. FRIEDRICH CONRAD, Charlottenburg 1, Königin-Luise-Straße 15.
(Vorgeschlagen durch Hrn. A. GEHRTS.)

Hr. Dr. RICHARD BÄR, Zürich, Schweiz, Bergstraße 54.
(Vorgeschlagen durch Hrn. EDGAR MEYER.)

Vermögens-Bilanz der Deutschen Physikalischen Gesellschaft

am 31. Dezember 1917.

Aktiva.	ℳ	₰	*Passiva.*	ℳ	₰
Bibliothek-Konto	12 920	—	Kapital-Konto	118 040	95
Effekten-Konto	140 285	50	Friedr. Vieweg & Sohn (Forderung aus 1916)	1 828	59
Inventar-Konto	256	10	Stiftungsfest-Konto	313	75
Kassa-Konto (einschließlich Postscheckkonto)	652	28	Deutsche Bank	16 147	55
Versicherungs-Konto	76	80	Kautions-Kreditoren-Konto (Anerkannte Forderung der Erbschaftssteuer aus dem Rießschen Legate)	3 924	—
Jahresbericht-Konto, Bd. 71/1915	606	58	Gewinn- und Verlust-Konto	19 416	42
„ „ „ 72/1916	450	—			
„ „ „ 73/1917	450	—			
Konto durchlaufender Rechnungen	50	—			
Kautions-Effekten-Konto; nom. 4500 ℳ 3 proz. Deutsche Reichsanleihe, als Sicherheit für die Erbschaftssteuer aus dem Rießschen Legate hinterlegt	3 924	—			
	159 671	26		159 671	26

Berlin, den 10. Mai 1918.

E. Jahnke, Rechnungsführer.

Geprüft und richtig befunden:

O. Krigar-Menzel. M. Born.
Kassenprüfer.

Gewinn- und Verlust-Konto

am 31. Dezember 1917.

Soll. ***Haben.***

Soll	ℳ	₰	Haben	ℳ	₰
Bureaubeamte	650	—	Gewinn-Vortrag aus 1916	17 231	81
Bote, Hauswart, Diener, Heizer	1 262	60	Beiträge Berliner Mitglieder 1. Halbjahr	2 480	—
Bücher und Zeitschriften	473	51	„ „ „ 2. „	2 640	—
Inventar (10 Proz. Abschreibung)	37	—	„ auswärtiger Mitglieder	3 060	—
Verhandlungen	1 375	86	Zinsen der Wertpapiere	2 180	—
Fortschritte d. Physik, Bd. 71/1915, Schriftleit.	450	—			
„ „ „ Bd. 71/1915, Verlag	119	99			
Laufende Ausgaben der Schriftleitung	313	70			
Versicherung	20	—			
Drucksachen	199	89			
Bureaubedarf	256	15			
Postgelder	882	59			
Museum	30	—			
Stiftungsfest-Rücklage	30	—			
Geschäftsführer der Gesellschaft	400	—			
Lombardzinsen	1 011	15			
Unvorhergesehene Ausgaben	662	95			
Gewinn-Vortrag aus 1916 . . . . 17 231,81					
Gewinn in 1917 . . . . 2 184,61	19 416	42			
	27 591	81		27 591	81

Vorstehende Gewinn- und Verlust-Rechnung ist von der heutigen Versammlung genehmigt worden.

Berlin, den 10. Mai 1918.

Der Vorsitzende: A. Einstein.

Über die Rotationsentropie der dreiatomigen Gase; von Koloman Széll.

(Eingegangen am 6. März 1918.)

Bekanntlich ist die Entropie eines zwei- oder mehratomigen Gases durch die Entropie seiner translatorischen und seiner rotatorischen Bewegung gegeben, d. h. durch die Translations- und Rotationsentropie. Die folgenden Zeilen beziehen sich auf die Berechnung der Rotationsentropie der dreiatomigen Gase, und zwar bestimme ich quantentheoretisch vom PLANCKschen Standpunkte aus auf Grund der Resultate der PLANCKschen Untersuchungen die Rotationsentropie der dreiatomigen Gase, in welchen eine jede Molekel zwei gleiche Hauptträgheitsmomente hat, bei hoher Temperatur und vergleiche den erhaltenen Ausdruck mit dem von O. SACKUR [1]) aus der SACKURschen Wahrscheinlichkeitsdefinition mit Hilfe des BOLTZMANN-PLANCKschen Entropieprinzips gewonnenen Resultat. Die Rotationsentropie zweiatomiger Gase bei hoher Temperatur auf Grund der Quantentheorie hat M. PLANCK [2]) berechnet (mit Hinweisung auf die TETRODEsche Arbeit), der gewonnene Ausdruck stimmt mit dem von H. TETRODE [3]) und O. SACKUR [4]) nach anderen Methoden berechneten Wert überein.

Nach der PLANCKschen [5]) Auffassung der Quantentheorie kann die thermodynamische Wahrscheinlichkeit eines jeden Zustandes des mechanischen oder elektrodynamischen Systems, das mit einer beliebigen Anzahl von Freiheitsgraden ausgestattet ist, durch eine bestimmte ganze Zahl ausgedrückt werden; dazu ist notwendig, daß der von den allgemeinen Koordinaten und Impulskoordinaten gebildete Zustandsraum einer Molekel in Elementargebiete von bestimmter Lage, Form und Größe eingeteilt werde.

---

[1]) O. SACKUR, Ann. d. Phys. (4) **40**, 91, 1913.
[2]) M. PLANCK, Verh. d. D. Phys. Ges. **17**, 418, 1915.
[3]) H. TETRODE, Ber. d. Akad. d. Wiss. v. Amsterdam v. 27. Februar 1915. Die Arbeit von TETRODE war mir nicht zugänglich.
[4]) O. SACKUR, Ann. d. Phys. (4) **40**, 87, 1913.
[5]) M. PLANCK, ebenda (4) **50**, 385, 1916 und Verh. d. D. Phys. Ges. **17**, 407, 438, 1915.

Bei der Berechnung der Rotationsentropie müssen wir den Zustandsraum einer Molekel, welcher sich auf die um einen festen Schwerpunkt stattfindende Bewegung bezieht, in Elementargebiete zerteilen; aus diesem Grunde sind die von den allgemeinen Koordinaten und Impulskoordinaten abhängenden Grenzflächen der Elementargebiete zu bestimmen. Von PLANCK[1]) wurden die Elementargebiete des Zustandsraumes eines solchen um einen festen Punkt sich bewegenden starren Körpers eingehend festgesetzt, welcher zwei gleiche Hauptträgheitsmomente ($J = K > L$) hat. Dieser Zustandsraum besteht aus den von der Fläche $u' = 0$ getrennten zwei Teilen, die sich bloß durch das Vorzeichen von γ (γ bedeutet die Komponente der augenblicklichen Drehungsgeschwindigkeit in bezug auf die dritte Hauptträgheitsachse) unterscheiden. Wenn die Elementargebiete bekannt sind, so können wir die Rotationsentropie nach der PLANCKschen Methode leicht berechnen.

Betrachten wir nun ein System von N gleichbeschaffenen, dreiatomigen, starren Gasmolekeln. Nehmen wir an: Jede der Molekeln besitzt bezüglich des Drehungsmittelpunktes (Schwerpunktes) zwei gleiche Hauptträgheitsmomente, ihre Hauptträgheitsachsen sind so gerichtet, daß γ in dem gegebenen Augenblick in bezug auf jede Molekel von positivem Vorzeichen ist. Die Rotationsentropie dieses Systems ist im gegebenen stationären Zustande:

$$S = -kN \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} w_{nq} \ln \frac{w_{nq}}{p_{nq}}, \tag{1}$$

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}, \tag{1a}$$

$$w_{nq} = \frac{N_{nq}}{N}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} w_{nq} = 1, \tag{2}$$

wo N_{nq} die Anzahl der Molekeln bedeutet, welche sich in dem betreffenden Zustand im Elementargebiet (nq) befinden. Aus den Gleichungen (82), (83), (86), (87) PLANCKs ergibt sich:

$$u = \frac{g^2}{8\pi^2 L} + \frac{g'^2}{8\pi^2 J}.$$

---

[1]) M. PLANCK, Ann. d. Phys. (4) 50, 413, 1916. Hinsichtlich der Bezeichnungen siehe PLANCK, l. c.

Die mittlere Energie der auf das Elementargebiet (nq) entfallenden Molekeln ist:

$$u_{nq} = \frac{\int\limits_{g_n}^{g_{n+1}} \int\limits_{g'_q}^{g'_{q+1}} u\, dg\, dg'^2}{p_{nq} h^3} = \frac{h^2}{8\pi^2 L}(n^2 + n + {}^1\!/_3) + \frac{h^2}{8\pi^2 J}(q^2 + q + {}^1\!/_2).$$

Aus der Bedingung des Entropiemaximums bei konstantem Energiewert U folgt auf Grund 1), 1a) und 2):

$$\Psi = S - \frac{U}{T} = kN ln \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (2q+1) e^{-\frac{\bar{u}_{nq}}{kT}}.$$

Bei hoher Temperatur $\left(A_1 = \frac{h^2}{8\pi^2 kLT} \leqslant 1,\ A_2 = \frac{h^2}{8\pi^2 JkT} \leqslant 1\right)$ ist:

$$\Psi = kN ln\left[e^{-\frac{A_1}{12}} \int\limits_0^{\infty} e^{-A_1(n+{}^1\!/_2)^2} dn\right]$$

$$+ kN ln\left[2e^{-\frac{A_2}{4}} \int\limits_0^{\infty} (q + {}^1\!/_2)\, e^{-A_2(q+{}^1\!/_2)^2} dq\right],$$

wo der zweite Teil, welcher von PLANCK[1]) berechnet worden ist, sich auf die zwei kohärenten Freiheitsgrade bezieht. Die Glieder $-\frac{A_1 kN}{12}$, $-\frac{A_2 kN}{4}$ vernachlässigt, erhält man:

$$\Psi = kN ln \frac{1}{2A_2}\sqrt{\frac{\pi}{A_1}}.$$

Die Rotationsenergie des in Betracht genommenen Gases ist also:

$$U = T^2 \frac{\partial \Psi}{\partial T} = {}^3\!/_2 kNT,$$

übereinstimmend mit der klassischen Theorie. Folglich ist die Rotationsentropie:

$$S = \Psi + \frac{U}{T} = kN ln \frac{1}{2A_2}\sqrt{\frac{e^3 \pi}{A_1}}$$

$$= kN ln \frac{2^3 J\sqrt{2 e^3 L \pi^7 (kT)^3}}{h^3}. \qquad 3)$$

---

1) M. PLANCK, Verh. d. D. Phys. Ges. 17, 419, 1915.

Zu demselben Resultat gelangen wir, wenn wir $J = K < L$ setzen. Unsere Berechnung ist auch im Falle mehratomiger Gase gültig, falls von den drei Hauptträgheitsmomenten einer jeden einzelnen Molekel zwei einander gleich sind.

Wegen der auf die SACKURsche Berechnung bezüglichen Bemerkungen ist die kurze Schilderung des SACKURschen Verfahrens notwendig: Nach der Annahme SACKURs ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine um den Schwerpunkt rotierende Gasmolekel während der Zeiten Δt_1, Δt_2 bzw. Δt_3 beim Durchgang durch eine bestimmte Lage, z. B. für die (EULERschen) Winkel $\vartheta = 0$, $\varphi = 0$ bzw. $\psi = 0$ eine Energie [1]) zwischen ε_1 und $\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_1$, ε_2 und $\varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_2$ bzw. ε_3 und $\varepsilon_3 + \Delta\varepsilon_3$ besitzt: $f(\varepsilon_1)\Delta\varepsilon_1\Delta t_1$, $f(\varepsilon_2)\Delta\varepsilon_2\Delta t_2$ bzw. $f(\varepsilon_3)\Delta\varepsilon_3\Delta t_3$. Die Anzahl der Molekeln, die diesen Bedingungen gleichzeitig Genüge leisten, ist:

$$n = Nf(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)f(\varepsilon_3)\Delta\varepsilon_1\Delta\varepsilon_2\Delta\varepsilon_3\Delta t_1\Delta t_2\Delta t_3 = h^3Nf(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)f(\varepsilon_3).$$

Wollen wir die Gesamtzahl der Molekeln erhalten, so müssen wir zwischen Energie ε_1 und $\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_1$, ε_2 und $\varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_2$ bwz. ε_3 und $\varepsilon_3 + \Delta\varepsilon_3$ die Zeiten Δt_1, Δt_2 bzw. Δt_3 als mittlere Umdrehungszeiten wählen, damit jede einzelne Molekel während dieser Zeiten die Lagen $\vartheta = 0$, $\varphi = 0$ bzw. $\psi = 0$ gerade einmal passiert. Im Ausdruck:

$$1 = h^3\Sigma f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)f(\varepsilon_3) \qquad 4)$$

sind für ε_1, ε_2 bzw. ε_3 nur diejenigen Werte zu setzen, welche sich voneinander in den ganzzahligen Mehrfachen von $\Delta\varepsilon_1 = h\nu_1$, $\Delta\varepsilon_2 = h\nu_2$ bzw. $\Delta\varepsilon_3 = h\nu_3$ (die ν bedeuten die Umdrehungszahlen pro Sekunde) unterscheiden. Mit Hilfe der Gleichung 4), sowie der Rotationsenergiegleichung:

$$U = h^3N\Sigma(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)f(\varepsilon_3) \qquad 5)$$

und der Entropiegleichung:

$$S = k\ln W = k\ln \frac{N!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots} \qquad 6)$$

können wir die f auf Grund des Satzes, daß die Entropie im stationären Zustand ein Maximum ist, berechnen. Nach dieser Berechnung ist:

$$f(\varepsilon) = \alpha' e^{-\beta\varepsilon}.$$

---

[1]) $\varepsilon_1 = \frac{J}{2}\dot{\vartheta}^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{J}{2}\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2, \quad \varepsilon_3 = \frac{L}{2}(\dot{\psi} + \cos\vartheta\,\dot{\varphi})^2.$

Die Rotationsentropie beträgt dann:

$$S = -3kNln h - kNln\alpha + \beta kU, \qquad 6a)$$

wo $\alpha = \alpha'^3$ ist. Setzt man bei hoher Temperatur die Werte der Konstanten α und β aus 4) und 5) ein, so ist:

$$S = kNln \frac{2^4 J \sqrt{2e^3 L \pi^7 (kT)^3}}{h^3}, \qquad 7)$$

welcher Wert um $kNln 2$ größer ist, als der Wert in 3).

Bei Sackur[1]) wird die Rotationsenergie einer Molekel durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{L}{2}(u + \cos\vartheta w)^2 + \frac{J}{2}v^2 + \frac{J}{2}\sin^2\vartheta w^2, \qquad 8)$$

wobei $u = \frac{d\vartheta}{dt}$, $v = \frac{d\varphi}{dt}$, $w = \frac{d\psi}{dt}$ $(0 \leqq \vartheta < \pi,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi,\ 0 \leq \psi < 2\pi)$ ist. Mit Hilfe der auf die drei Hauptträgheitsachsen bezüglichen Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit kann man aber einsehen, daß der richtige Wert der Rotationsenergie einer Molekel:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{J}{2}u^2 + \frac{J}{2}\sin^2\vartheta v^2 + \frac{L}{2}(w + \cos\vartheta v)^2 \qquad 9)$$

ist.

Der Sackursche Rotationsentropiewert 7) ergibt sich [auch mit Hilfe der Gleichung 9)], falls man im Rotationsenergieausdruck einer jeden Molekel statt $\cos\vartheta$ den Mittelwert $\left(\int_0^\pi \frac{\cos\vartheta d\vartheta}{\pi} = 0\right)$ substituiert, anstatt der entsprechenden Potenz des $\sin^2\vartheta$ aber den Mittelwert erst in den zum Ausdruck der Rotationsentropie nötigen Gleichungen von α und β einsetzt. Beim konsequenten und richtigen Verfahren substituiert man aber die entsprechenden Mittelwerte erst in den Gleichungen von α und β entsprechend der Berechnung der Mittelwerte; in diesem Falle hat man zur Ausführung der Integration in den Gleichungen 4) und 5) weitere Voraussetzungen nötig.

Sackur hat auf analogem Wege auch die Translationsentropie bestimmt. Er verglich, mit Einführung der chemischen

[1]) O. Sackur, Ann. d. Phys. (4) **40**, 92, 1913.

Konstanten[1]), die für den Dampfdruck des Eises und bei den chemischen Gleichgewichten (bei Wasserdampf- und Kohlendioxydbildung) für den Gleichgewichtskoeffizienten K bestimmten Werte mit den experimentell festgestellten. Die berechneten Werte sind zum Teil in genügender Übereinstimmung mit den experimentell beobachteten ... Die Richtigkeit dieser berechneten Werte — außer den zur Integration der Gleichungen 4) und 5) gemachten Annahmen — hängt davon ab, in welchem Maße die Gleichheit zweier Hauptträgheitsmomente, dann die in bezug auf die Berechnung des Dampfdruckes, sowie der chemischen Gleichgewichte und der chemischen Konstanten (der Bestimmung der Trägheitsmomente und des c_p) gemachten Voraussetzungen gültig sind. Insgesamt alle diese Voraussetzungen sind aber keineswegs streng gültig, daher ist bei den dreiatomigen Gasen das SACKURsche Verfahren nur zur angenäherten Berechnung von Dampfdrucken und von chemischen Gleichgewichten anwendbar.

---

[1]) Die chemische Konstante ist gegeben durch $C = \frac{S' - c_p + R \ln R}{2{,}3\, R}$, S' ist die Entropiekonstante, R die absolute Gaskonstante.

Notiz zur Berechnung der Strahlungskonstanten c_2 und σ;

von F. Henning.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 8. März 1918.)

Die von Bohr begründete und von Sommerfeld[1]) zu großer Vollkommenheit ausgebaute Theorie der Spektrallinien ist von Paschen[2]) für Helium und Wasserstoff eingehend geprüft und in allen Einzelheiten bestätigt worden. Nach empirischer Bestimmung einer universellen und einer für jedes Gas charakteristischen Konstanten liefert die Theorie nicht nur eine genaue Darstellung der Serienspektren beider Gase, sondern sie gibt auch gleichzeitig über die Feinstruktur der Linien Aufschluß und bietet Anhaltspunkte für die Intensitätsverhältnisse der einzelnen Komponenten zueinander. Da bei der Ausmessung der Spektren so hohe Genauigkeiten erzielt werden wie kaum in einem anderen Gebiet der Physik, so rechtfertigt die überraschende Übereinstimmung von Theorie und Beobachtung die Ausnutzung der empirisch bestimmten Konstanten zur Ermittelung anderer physikalischer Größen.

Für die Wellenlänge λ der jeweils stärksten Komponente einer Spektrallinie gilt die Beziehung

$$\frac{1}{\lambda} = B\left(\frac{E}{e}\right)^2\left[\frac{1}{i^2}-\frac{1}{k^2}\right]\left[1+\frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{k^2}\right)\right].$$

i und k sind beliebige ganze Zahlen, die nur der Bedingung $k > i$ zu gehorchen haben; e bezeichnet die Ladung des Elektrons in elektrostatischen Einheiten, E die Ladung des positiven Atomkernes, die bei Wasserstoff zu $E_1 = e$, bei Helium zu $E_2 = 2e$ angenommen wird. Die universelle Konstante hat nach der Theorie den Wert $\alpha = \frac{2\pi e^2}{ch}$, die charakteristische Konstante B (die Rydbergsche Serienkonstante) ist $B = \frac{2\pi^2 e^4}{ch^3}\cdot\frac{Mm}{M+m}$.

---

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. (4) **51**, 1—94, 1916.

2) F. Paschen, ebenda (4) **50**, 901—940, 1916.

Hierbei bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit, h die aus der PLANCKschen Theorie der Energiequanten bekannte Größe, m die ruhende Masse des Elektrons und M die Masse des positiv geladenen Atomkernes.

Alle auf Wasserstoff bezüglichen Größen mögen durch den Index 1, alle auf Helium bezüglichen Größen durch den Index 2 kenntlich gemacht werden.

Die Beobachtungen von PASCHEN lieferten

$$B_1 = 109\,677{,}69 \pm 0{,}06,$$
$$B_2 = 109\,722{,}14 \pm 0{,}04,$$
$$\alpha = (7{,}29 \pm 0{,}04)\,.\,10^{-3}.$$

Für die folgenden Betrachtungen sind nur die beiden Größen B_1 und B_2 von Bedeutung. Aus ihnen leitete PASCHEN bereits sehr genaue Werte für die spezifische Ladung des Elektrons und die Quantenkonstante h ab. Sie sind aber in ganz besonders günstiger Weise auch zur Berechnung der Strahlungskonstanten c_2 und σ geeignet, die durch die Gleichungen für die Intensität J der spektral zerlegten schwarzen Strahlung und durch die Gleichung für die Gesamtenergie G, welche 1 cm² eines schwarzen Körpers der absoluten Temperatur T pro Sekunde in den hemisphärischen Raum ausstrahlt, definiert sind. Es gilt nach dem Gesetz von PLANCK

$$J = c_1\,.\,\lambda^{-5}\,\frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$$

und nach dem Gesetz von STEFAN-BOLTZMANN

$$G = \sigma T^4.$$

Unter Zurückführung auf die universelle Quantenkonstante h und auf die universelle Konstante $k = \frac{R}{N}$ (Verhältnis von molekularer Gaskonstante R zu AVOGADROscher Zahl N) ergibt die PLANCKsche Theorie

$$c_2 = \frac{ch}{k}; \qquad \sigma = 1{,}08234 \cdot 12 \cdot \pi \cdot \frac{k}{c^2 h^3}.$$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{A}$ die bei der Elektrolyse von einem Grammäquivalent transportierte Elektrizitätsmenge in elektro-

magnetischen Einheiten, so ist $N = \frac{\mathfrak{A}c}{e}$ zu setzen und also $k = \frac{Re}{\mathfrak{A}c}$. Die Größe h findet man aus der RYDBERGschen Zahl B als $h = \sqrt[3]{\frac{2\pi^2 e^4 m}{c B_\infty}}$, wenn man B_∞ als den Grenzwert von B für $M = \infty$ definiert. Somit folgt

$$c_2 = \sqrt[3]{2\pi^2} \cdot \frac{c^{5/3}\mathfrak{A}}{R} \cdot \frac{e^{2/3}}{\left(B_\infty \cdot \frac{e}{m}\right)^{1/3}}$$

und

$$\sigma = \frac{6{,}4940}{\pi} \cdot \frac{R^4}{c^5 \mathfrak{A}^4} \cdot \frac{B_\infty \cdot \frac{e}{m}}{e}.$$

Das Produkt $B_\infty \cdot \frac{e}{m}$ ist aus

$$B_1 = B_\infty \cdot \frac{M_1}{M_1 + m} \quad \text{und} \quad B_2 = B_\infty \cdot \frac{M_2}{M_2 + m}$$

ableitbar. Man findet aus diesen beiden Größen zunächst, wenn man das Verhältnis der Atommassen $M_1 : M_2$ gleich dem Verhältnis der Atomgewichte $A_1 : A_2$ setzt,

$$B_\infty = B_2 \left[1 + \frac{A_1(B_2 - B_1)}{A_2 B_1 - A_1 B_2}\right]$$

oder mit sehr großer Näherung

$$B_\infty = B_2 \left[1 + \frac{A_1(B_2 - B_1)}{B_1(A_2 - A_1)}\right]$$

und

$$\frac{M_1}{m} = \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_2(B_2 - B_1)}.$$

Da nun

$$\frac{e}{m} = \frac{e}{M_1} \cdot \frac{M_1}{m} = \frac{\mathfrak{A}c}{A_1} \cdot \frac{M_1}{m}$$

ist, so folgt

$$B_\infty \cdot \frac{e}{m} = \frac{B_1 B_2}{B_2 - B_1} \cdot \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right) \mathfrak{A}c.$$

Für das Atomgewicht des Wasserstoffs gilt $A_1 = 1{,}008$, für dasjenige des Heliums $A_2 = 4{,}002 \pm 0{,}002$[1]) und man erhält, da $B_2 - B_1 = 44{,}45 \pm 0{,}10$ ist,

$$B_\infty \cdot \frac{e}{m} = 2{,}0093 . 10^8 . \mathfrak{A}c = Z . \mathfrak{A}c.$$

---

[1]) W. HEUSE, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 518—523, 1913.

Die Genauigkeit des Zahlenfaktors $Z = 2{,}0093 \,.\, 10^8$ beträgt $\gamma = 0{,}35$ Proz., wenn man die Genauigkeit von $B_2 - B_1$ zu $\gamma = 0{,}23$ Proz. und diejenige der Atomgewichte von Wasserstoff bzw. Helium zu $\gamma = 0{,}07$ Proz. bzw. $\gamma = 0{,}05$ Proz. annimmt.

Setzt man den Ausdruck von $B_\infty \cdot \frac{e}{m}$ in die Gleichungen für c_2 und σ ein, so folgt

$$c_2 = \sqrt[3]{2\pi^2} \cdot \frac{c^{4/3} \,.\, \mathfrak{A}^{2/3}}{R} \cdot \frac{e^{2/3}}{Z^{1/3}} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{6{,}4940}{\pi} \cdot \frac{R^4}{\mathfrak{A}^3 \,.\, c^4} \cdot \frac{Z}{e} \,.$$

Nach den besten vorliegenden Bestimmungen ist

$$\begin{array}{ll} c = 2{,}9989 \,.\, 10^{10}\,\text{cm}\,^{1)} & (\gamma = 0{,}02 \text{ Proz.}) \\ \mathfrak{A} = 9{,}653 \,.\, 10^3\,\text{CGS} & (\gamma = 0{,}05 \text{ Proz.}) \\ R = 8{,}315 \,.\, 10^7\,\text{Erg} & (\gamma = 0{,}03 \text{ Proz.}) \end{array}$$

Mit diesen Zahlen erhält man $c_2 = 1{,}3729 \cdot 10^9 \cdot \frac{e^{2/3}}{Z^{1/3}}$ und $\sigma = 1{,}3582 \cdot 10^{-22} \cdot \frac{Z}{e} \cdot$ Nach Addierung der möglichen Fehler aller einzelnen Bestimmungsstücke ist die Genauigkeit des Zahlenfaktors im Ausdruck für c_2 auf $\gamma = 0{,}09$ Proz., diejenige des Zahlenfaktors im Ausdruck für σ auf $\gamma = 0{,}35$ Proz. zu schätzen.

Führt man endlich als den zuverlässigsten Wert für das Elementarquantum der elektrischen Ladung nach der Bestimmung von MILLIKAN[2]) $e = 4{,}774 \,.\, 10^{-10}$ (Genauigkeit $\gamma = 0{,}20$ Proz.) sowie den oben angegebenen Wert von Z ein, so erhält man

$$\begin{array}{ll} c_2 = 1{,}4317 & (\text{Genauigkeit } \gamma = 0{,}34 \text{ Proz.}) \\ \sigma = 5{,}717 \,.\, 10^{-5} & (\text{Genauigkeit } \gamma = 0{,}90 \text{ Proz.}) \end{array}$$

Für die Berechnung von c_2 ist besonders der Umstand vorteilhaft, daß die Fehler von Z und e das Resultat nur wenig beeinflussen. Bei der Ermittelung von σ spielen die Fehler im elektrochemischen Äquivalent und der Gaskonstanten, die mit einem Betrage von zusammen 0,27 Proz. in das Resultat eingehen, bereits eine nicht unerhebliche Rolle.

Es ist von Interesse, die so berechneten Werte von c_2 und σ mit den Ergebnissen der direkten Strahlungsmessungen zu vergleichen.

---

[1]) Nach MICHELSON, Phil. Mag. (6) **3**, 320—337, 1902.
[2]) MILLIKAN, Phys. ZS. **14**, 796—812, 1913.

Nach den sehr eingehenden Beobachtungen von WARBURG und MÜLLER[1]) ergab sich die Strahlungskonstante des PLANCKschen Gesetzes zu $c_2 = 1{,}425$, wenn die Temperaturmessung des schwarzen Körpers nach dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz erfolgte, jedoch zu $c_2 = 1{,}430$ bzw. $1{,}440$, wenn die Temperaturmessung auf das WIENsche Verschiebungsgesetz gegründet und die Dispersion des Quarzes nach CARVALLO bzw. PASCHEN angenommen wurde. Als Endresultat wird $c_2 = 1{,}43$ angegeben.

Von den zahlreichen direkten Bestimmungen der Konstante σ seien hier nur drei besonders sorgfältig durchgeführte zum Vergleich herangezogen:

a) VALENTINER[2]) fand als wahrscheinlichsten Wert . . . . $\sigma = 5{,}58 \,.\, 10^{-5}$
b) Aus GERLACHs[3]) Messungen folgt . . . . $\sigma = 5{,}85 \,.\, 10^{-5}$
c) WESTPHAL[4]) ermittelte . . . . $\sigma = 5{,}57 \,.\, 10^{-5}$

Zusammenfassung. Nach den direkten Strahlungsmessungen ist zu setzen:

$$c_2 = 1{,}43 \pm 0{,}01 \text{ cm} \,.\, \text{Grad};$$
$$\sigma = (5{,}67 \pm 0{,}18) \,.\, 10^{-5} \text{ Erg cm}^{-2} \,.\, \text{sec}^{-1} \,.\, \text{Grad}^{-4}.$$

Zufolge der SOMMERFELDschen Theorie ergibt sich aus den Messungen an Spektrallinien und aus der Zahl für das elektrische Elementarquantum

$$c_2 = 1{,}432 \pm 0{,}005 \text{ cm Grad};$$
$$\sigma = (5{,}717 \pm 0{,}052) \,.\, 10^{-5} \text{ Erg cm}^{-2} \,.\, \text{sec}^{-1} \,.\, \text{Grad}^{-4}.$$

Die ausgezeichnete Übereinstimmung zwischen der Berechnung [die, wie dem Verfasser nachträglich bekannt wurde, bereits L. FLAMM[5]) auf derselben Grundlage in etwas anderer Weise durchgeführt hat] und der Beobachtung bildet eine weitere Stütze für die Annahmen der Quantentheorie.

Berlin-Lichterfelde, den 8. März 1918.

---

[1]) E. WARBURG und C. MÜLLER, Ann. d. Phys. (4) **48**, 410—432, 1915.
[2]) S. VALENTINER, ebenda (4) **31**, 275—311, 1910 u. **39**, 489—492, 1912.
[3]) GERLACH, ebenda (4) **38**, 1—29, 1912 u. **50**, 259—269, 1916.
[4]) W. WESTPHAL, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 897—902, 1913.
[5]) L. FLAMM, Phys. ZS. **18**, 515—521, 1917.

*

Lassen sich Brechungsexponenten der Körper für Röntgenstrahlen experimentell ermitteln?

Von A. Einstein.

(Eingegangen am 21. März 1918.)

Vor einigen Tagen erhielt ich von Herrn Prof. A. Köhler (Wiesbaden) eine kurze Arbeit [1]), in welcher eine auffallende Erscheinung bei Röntgenaufnahmen geschildert ist, die sich bisher nicht hat deuten lassen. Die reproduzierten Aufnahmen — zumeist menschliche Gliedmaßen darstellend — zeigen an der Kontur einen hellen Saum von etwa 1 mm Breite, in welchem die Platte heller bestrahlt zu sein scheint als in der (nicht beschatteten) Umgebung des Röntgenbildes.

Ich möchte die Fachgenossen auf diese Erscheinung hinweisen und beifügen, daß die Erscheinung wahrscheinlich auf Totalreflexion beruht. Nach der klassischen Dispersionstheorie müssen wir erwarten, daß der Brechungsexponent n für Röntgenstrahlen nahe an 1 liegt, aber im allgemeinen doch von 1 verschieden ist. n wird kleiner bzw. größer als 1 sein, je nachdem der Einfluß derjenigen Elektronen auf die Dispersion überwiegt, deren Eigenfrequenz kleiner oder größer ist als die Frequenz der Röntgenstrahlen. Die Schwierigkeit einer Bestimmung von n liegt darin, daß $(n-1)$ sehr klein ist (etwa 10^{-6}). Es ist aber leicht einzusehen, daß bei nahezu streifender Inzidenz der Röntgenstrahlen im Falle $n < 1$ eine nachweisbare Totalreflexion auftreten muß.

Führen wir in das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = n$$

die Ergänzungswinkel $\psi = 90 - \varphi$ und $\psi' = 90 - \varphi'$ ein, wobei ψ und ψ' sehr kleine Winkel sind, und setzen wir

$$n = 1 + \varepsilon,$$

so nimmt das Brechungsgesetz die Form an

$$\psi'^2 - \psi^2 = \varepsilon.$$

---

[1]) A. Köhler, Fortschritte auf dem Gebiet der Röntgenstrahlen **24**, 236, 1916. (Vgl. Lucas Gräfe & Sillem, Hamburg.)

Totalreflexion wird eintreten bei negativem ε. Der Grenzwinkel $\bar{\psi}$ der Totalreflexion wird durch die Bedingung $\psi' = 0$ bestimmt; es ist also

$$\bar{\psi} = \sqrt{-\varepsilon}.$$

Ist also $(-\varepsilon)$ von der Größenordnung 10^{-6}, so ist $\bar{\psi}$ von der Größenordnung 10^{-3}. Es ist also wohl denkbar, daß der helle Saum der KÖHLERschen Aufnahmen durch fast tangential auf das Objekt fallende Strahlen verursacht ist, welche durch Totalreflexion eine kleine Ablenkung erfuhren, und deren Wirkung sich zu der Wirkung der Röntgenstrahlen addiert, welche hart am Objekte vorbeistreichen.

Im Falle eines positiven ε ist die Realisierung weniger bequem, da dann die Totalreflexion an einem schwach gekrümmten einspringenden Teil der Körperoberfläche im Innern des Körpers stattfinden müßte.

Bei unserer vollständigen Unkenntnis über die Brechung der Röntgenstrahlen wäre es sehr erwünscht, wenn ein auf dem Gebiet der Röntgenaufnahmen erfahrener Kollege sich der Frage annähme, zunächst einmal, um zu untersuchen, ob es sich hier wirklich um Totalreflexion handelt.

Anmerkung zur Korrektur. Auch im Falle $\varepsilon > 0$ müßte sich bei der Aufnahme rundlicher Objekte ein beobachtbares Randphänomen einstellen, und zwar infolge von Brechung quasitangential einfallender Strahlen. Hier ist offenbar ein schmaler verdunkelter Streifen längs des Schattenrandes zu erwarten (an der Innenseite der geometrischen Schattengrenze). Für die Breite dieses Streifens ist $\sqrt{\varepsilon}$ maßgebend.

Über das Atommodell von Niels Bohr; von Wilh. H. Westphal.

(Eingegangen am 22. März 1918.)

Herr J. STARK[1]) hat kürzlich gegen das BOHRsche Atommodell den Einwand erhoben, „daß die Aussage über die Abhängigkeit der Frequenz der Strahlung von der Endbahn im Widerspruch stehe mit der bis jetzt in der Physik üblichen und bewährten Denkweise, das Geschehen in einem Raumzeitpunkte nicht von einem späteren Zeitpunkte abhängig zu machen.“

Dieser Einwand besteht nicht zu Recht. Vielmehr ist die beanstandete Aussage logisch etwa analog dem Satz von der schnellsten Ankunft des Lichtes, der doch keineswegs besagen will, daß das Licht sich beim Verlassen der Lichtquelle den Weg aussucht, auf dem es sein späteres Ziel am schnellsten erreicht. Anderenfalls wäre gegen diesen Satz der gleiche logische Einwand zu erheben.

Es besteht im Falle des BOHRschen Atommodells keine Veranlassung, zu bezweifeln, daß der kausale Zusammenhang der folgende ist. Das Elektron kann nach dem durch bisher unbekannte Gründe hervorgerufenen Verlassen seiner Anfangsbahn (Ordnungszahlen m und m') nur bestimmte, durch die Serienformel

$$\nu = N\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{(m+m')^2}\right]$$

gegebene Frequenzen emittieren. Die Summe der Ordnungszahlen der Endbahn ($s = n + n'$) und damit die Frequenz ν, desgleichen die spätere Aufteilung von s in n und n', also die Energie und Exzentrizität der Endbahn, sind zweifellos durch die Anfangsbedingungen eindeutig gegeben.

Es entsteht also nicht die Frequenz ν, weil die Energie des Elektrons im Verlauf der Emission um den Betrag $h\nu$ sinkt, sondern umgekehrt ist die Endenergie des Elektrons um den Betrag $h\nu$ kleiner als seine Anfangsenergie, weil mit der Emission einer Strahlung von der Frequenz ν infolge des allerdings bisher

---

[1]) J. STARK, Ann. d. Phys. (4) **54**, 81, 1917.

unbekannten Mechanismus des Strahlungsvorganges ein Energieverlust $h\nu$ eingetreten ist.

Der vorstehend besprochene Einwand des Herrn STARK gibt Veranlassung zur Prüfung der Frage, ob man bereits jetzt einiges über den Übergang des Elektrons aus dem strahlenden Zustande in die nicht strahlende Endbahn aussagen kann.

Man muß annehmen, daß das Elektron sich im Augenblick der Beendigung seiner Ausstrahlung $\left(\text{Energie } W = -\frac{N.h}{s^2}\right)$ in einem solchen Bewegungszustande und in einer solchen Lage zum Atomkern befindet, daß es tangierend in eine der statischen Endbahnen übergehen kann. (Es ist hier der Einfachheit halber von der von A. SOMMERFELD eingeführten Quantelung der Lage im Raume abgesehen. Das Ergebnis bleibt auch nach Einführung dieser Quantelung durchaus bestehen.) Vorbedingung für einen solchen Übergang ist, daß die Bewegung des Elektrons in diesem Augenblick einer Quantenbedingung $p = nh/2\pi$ genügt. (p = Impulsmoment, $0 \leqq n \leqq s$.)

Nimmt man zunächst jede mit dieser Quantenbedingung und der Energie des Elektrons vereinbare Lage des Elektrons im Augenblick des Überganges des Elektrons in die Endbahn als möglich an, so muß sich das Elektron, um in eine Ellipse von bestimmter Exzentrizität überzugehen, irgendwo innerhalb einer Fläche befinden, die durch zwei Kreise begrenzt wird, in deren Mittelpunkt sich der Kern befindet, und deren Radien die Perihel- und Apheldistanz der betreffenden Ellipsenart sind. Diese Fläche ist am größten für Pendelbahnen und schrumpft für die Kreisbahn in diesen Kreis selbst zusammen. Wäre also jede mit der Energie und den Quantenbedingungen vereinbare Lage des Elektrons beim Übergang in die Endbahn gleich wahrscheinlich, so wäre die Wahrscheinlichkeit für jede Art von statischen Bahnen proportional dem Inhalt dieser Fläche, also für die Kreisbahn gleich Null. Da dies nach A. SOMMERFELD mit den Beobachtungen von F. PASCHEN [1]) nicht vereinbar ist, so ist diese Möglichkeit auszuscheiden.

Man muß demnach annehmen, daß gewisse Einschränkungen bezüglich der Bedingungen zu machen sind, unter denen ein

---

[1]) F. PASCHEN, Ann. d. Phys. (4) **50**, 901, 1916.

Elektron nach Beendigung seiner Ausstrahlung in seine Endbahn übergeht.

Von den verschiedenen Möglichkeiten seien hier die beiden folgenden betrachtet.

1. Es wird angenommen, daß nach Beendigung des Strahlungszustandes das Elektron nur eine bestimmte von der Summe $s = n + n'$ der Ordnungszahlen abhängige Geschwindigkeit besitzen kann. Es kommt dafür nur die Umlaufsgeschwindigkeit der der betreffenden Endenergie entsprechenden Kreisbahn in Frage, da anderenfalls überhaupt nie eine Kreisbahn eintreten könnte. Es wird also vorausgesetzt, daß der Strahlungszustand stets sein Ende auf einem Kreise findet, der identisch ist mit der der Endenergie entsprechenden Kreisbahn. Dies ist gleichbedeutend damit, daß der Übergang in die statischen Ellipsen stets in den Endpunkten ihrer kleinen Achsen erfolgt. Zeichnet man nämlich um ein Anziehungszentrum die Ellipsen gleicher Energie, so liegen die Endpunkte ihrer kleinen Achsen stets auf der Kugelfläche, deren Radius gleich dem Radius der Kreisbahn gleicher Energie ist.

Faßt man nun einen beliebigen Punkt dieses Kreises ins Auge und betrachtet zunächst nur einen Umlaufssinn, so erkennt man: Jeder derartige Punkt gehört zwei Ellipsen jeder möglichen Exzentrizität an, jedoch nur einem Kreise (s. Fig. 1).

Ist also jede mit einer Quantenbedingung $p = n . h/2\pi$ verträgliche Richtung gleich wahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten jeder möglichen Art von elliptischen Endbahnen doppelt so groß, wie für den Kreis.

Es ist ohne weiteres ersichtlich (wenn man beide Umlaufsrichtungen in Betracht zieht), daß die Wahrscheinlichkeit für eine Pendelbahn, die man allerdings aus dynamischen Gründen für unmöglich erklären wird, ebenfalls nur halb so groß ist, wie für eine elliptische Bahn.

2. Zu dem gleichen Resultat bezüglich der Wahrscheinlichkeit von Kreisbahnen werden wir geführt, wenn wir statt der beiden Endpunkte der kleinen Achsen die Endpunkte der großen Achsen, also Perihel und Aphel, als Übergangspunkte in die Endbahn wählen.

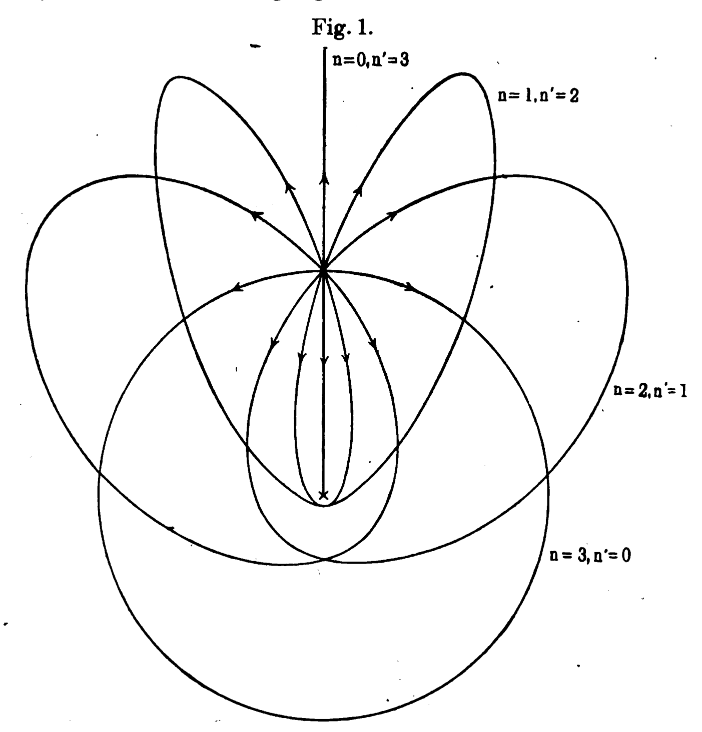
In diesem Falle erfolgt der Übergang also auf konzentrischen Kreisen, deren Radien die Perihel- und Apheldistanzen der statischen Bahnen mit der Ordnungszahlsumme $s = n + n'$ sind.



Zu jeder Art von Ellipsen gehören zwei derartige Kreise, zur Kreisbahn jedoch nur der eine Kreis selbst. Zur Pendelbahn gehört ein Kreis und der Mittelpunkt desselben (s. Fig. 2).

Nimmt man an, daß jede der hiernach zulässigen Entfernungen des Elektrons vom Kern im Augenblick des Überganges in die Endbahn gleich wahrscheinlich ist, so ist die Wahrscheinlichkeit für den Übergang in jede Art von elliptischen Bahnen doppelt so groß, wie für den Übergang in eine Kreisbahn.

Fig. 1.



Außer den hier als Beispiel behandelten Annahmen kann man noch verschiedene andere mit dem gleichen Ergebnis bezüglich der Wahrscheinlichkeit der Kreisbahnen machen.

Wir werden damit, soweit es den Kreis angeht, zu einer sehr anschaulichen Begründung einer Beziehung bezüglich der Intensitätsverteilung in einer Feinstruktur geführt, die von A. Sommerfeld [1]) durch Betrachtung des Phasenraumes als möglich

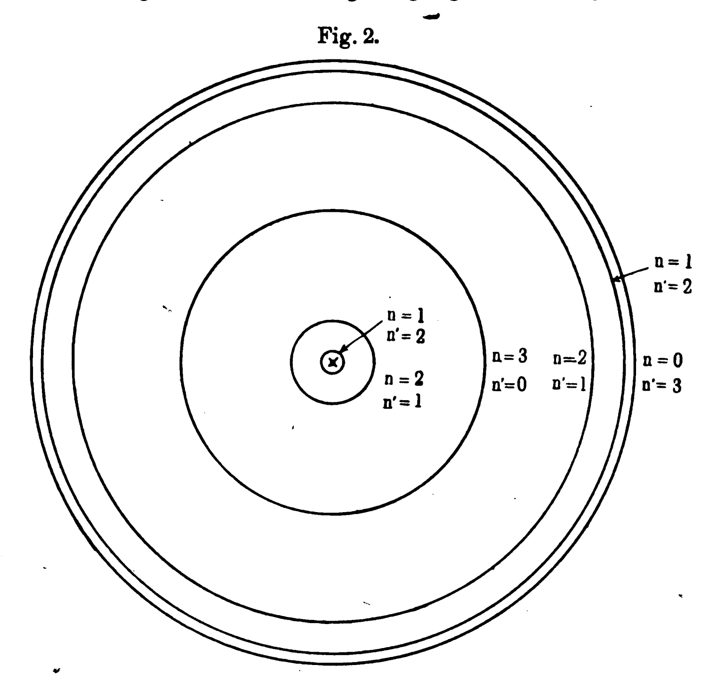
[1]) A. Sommerfeld, Verh. Bayr. Akad. d. Wiss. 1917, S. 83.

nachgewiesen wurde, und die durch Beobachtungen bei Gleichstromerregung gestützt werden.

Für die Bewertung der Kreisbahn als Anfangsbahn folgt natürlich das gleiche Resultat wie für die Endbahnen, da man annehmen kann, daß eine Anfangsbahn ihrerseits in der Regel die Endbahn eines früheren Strahlungsvorganges (Emission oder Absorption) gewesen ist.

Da man verlangen muß, daß der Endzustand dem Anfangszustande bei Beginn des Strahlungsvorganges eindeutig zugeordnet

Fig. 2.



ist, so wird man z. B. im Falle 1 annehmen müssen, daß die Anfangsbedingungen, aus denen schließlich eine Kreisbahn oder Pendelbahn als Endbahn resultiert, in ihrer Wahrscheinlichkeit einen Faktor 1/2 aufweisen gegenüber den Bedingungen für das Entstehen einer elliptischen Bahn. Es liegt nahe, das Entstehen einer Kreis- oder Pendelbahn von einem Verlassen der Anfangsbahn im Perihel oder Aphel abhängig zu machen, da die dort auftretenden extremen Geschwindigkeiten während eines Umlaufs nur einmal vorkommen, jede dazwischen liegende Geschwindigkeit

dagegen zweimal. (Eine Schwierigkeit entsteht nur, wenn die Anfangsbahn ein Kreis ist.)

Obgleich die hier vorgetragenen Anschauungen durchaus hypothetischer Natur sind und durch zahlreiche andere mit dem gleichen Ergebnis ersetzt werden können, schien es mir richtig, sie vorzubringen, um an einem Beispiel zu zeigen, daß, trotz aller physikalischer Rätsel, die uns das Bohrsche Atommodell aufgibt, bisher keinerlei Gründe dafür sprechen, daß man beim Versuch einer Aufhellung des Dunkels, das über den zugrunde liegenden Vorgängen liegt, eine andere als die bisher in der Physik übliche und bewährte Denkweise anwenden muß.

Berlin, März 1918.

Einige experimentelle Prüfungen der Debyeschen Theorie der Wärmeleitung in Kristallen;

von F. A. Giacomini.

Vorläufige Mitteilung.

(Eingegangen am 7. Mai 1918.)

Der vorliegende Auszug enthält einige Resultate und Ergebnisse einer experimentellen Untersuchung der DEBYEschen Formel[1]) für die Wärmeleitfähigkeit „K“ in Kristallen

$$K = \frac{3}{16\,\pi^3} \cdot \frac{1}{3\,\alpha^3 + 1} \cdot \frac{q^5}{K_0\,\nu^4} \cdot \frac{1}{k\,T} \cdot c\varrho.$$

Es wurden Beobachtungen von K für solche Substanzen und bei solchen Temperaturen angestellt, an denen für die anderen, in obiger Formel stehenden Konstanten beobachtete Werte vorlagen. Die Wahl der zu untersuchenden Substanzen wurde auf diejenigen beschränkt, für welche die Werte von „ν“ (Schwingungszahl) durch die Beobachtungen von H. RUBENS[2]) und H. VON WARTENBERG bekannt waren.

Tabelle 1 gibt die Werte von K (bei $T = 273$) an, wie sie vom Verfasser beobachtet und wie sie nach der DEBYEschen Formel berechnet wurden, im letzten Falle wurden sowohl die RUBENSschen als auch die MADELUNGschen Werte[3]) von ν in die Formel eingesetzt.

Die Wärmeleitfähigkeit K wurde mit einer Zweig- oder Brückenvorrichtung gemessen, wobei die unvermeidlichen störenden Nebenwirkungen, verursacht durch Gasleitung, Konvektion und Strahlung, automatisch ausgeschaltet waren. Dies war wichtig, da die Versuchsobjekte und somit auch die in Frage kommenden Wärmemengen sehr klein waren. Die Figur zeigt eine Skizze

---

[1]) P. DEBYE, Vorträge der Wolfskehl-Stiftung 1913 in Göttingen (Teubner 1914), S. 46.

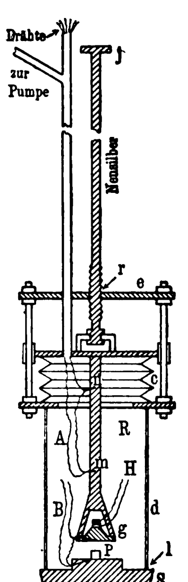
[2]) H. RUBENS und H. VON WARTENBERG, Sitz.-Ber. d. Kgl. Pr. Akad. d. Wiss. 1914, Heft 7.

[3]) Siehe RUBENS, l. c., S. 188.

Tabelle 1.

Substanzen	$K\left[\frac{\text{cal}}{\text{cm sec}}\right]$ Berechnet mit ν-Werte nach Rubens	$K\left[\frac{\text{cal}}{\text{cm sec}}\right]$ Berechnet mit ν-Werte nach Madelung	$K\left[\frac{\text{cal}}{\text{cm sec}}\right]$ Beobachtet	Temperatur-koeffizient $\frac{\Delta K}{K \cdot \Delta T}$	Spezifische Volumen $X \cdot 0{,}0361$	Bemerkungen
Na Cl	0,005 2	0,160 Einstein	0,017 Eucken	—	0,017	Berechnet von Debye selbst
K Cl	0,001 67	0,001 68	0,016 6	— 0,005 2	0,018 3	A. Eucken $K = 0{,}016\,65$
K J	0,000 43	0,000 56	0,012	—	0,011 8	
Ag Cl	0,006 6	0,001 25	0,002 6	— 0,004 47	0,006 1	
Ag Br	0,008 1	0,002 0	0,002 46	— 0,004 5	0,005 5	
Tl Cl	—	—	0,002 34	— 0,004 3	0,005 1	
Tl Br	—	—	0,001 95	—	0,004 8	
Horn-Silber	—	—	0,002 62	—	0,005 01	
Glas	—	—	0,002 02	+ 0,003 4	—	
„	—	—	0,002 19	—	—	$T = 298$
Ebonit	—	—	0,000 378	—	—	Eucken $K = 0{,}000\,371$
Cu	—	—	0,938	— 0,002 4	—	Schott $K = 0{,}941$
„	—	—	0,956	—	—	$T = 194$
K Cl kristallinisch . .	—	—	0,014 25	—	—	
H_2-Glas	—	—	0,000 398 1	—	—	
Luft	—	—	0,000 056 2	—	—	

des Apparates. Das Prinzip der Methode besteht darin, daß der konstant gehaltene Wärmestrom durch zwei Wege hindurchfließt, von denen der eine mittels der Schraube j ausgeschaltet werden kann. Die Temperaturzustände werden in beiden Fällen stationär gehalten. Die Empfindlichkeit des Instruments und der Methode war so groß, daß auch die Wärmeleitfähigkeiten von Gasen genau gemessen werden konnten (siehe Tabelle 1). Diese Empfindlichkeit wurde dadurch erreicht, daß sowohl der Energiestrom als auch die Temperaturunterschiede thermoelektrisch an einem empfindlichen Galvanometer abgelesen wurden.



A u. *B* Thermoelemente,
P Versuchsobjekt,
H Heizdraht,
j Schraube.

Außer der Wärmeleitfähigkeit K selbst sind in der Tabelle 1 auch die Temperaturkoeffizienten von K für AgCl, AgBr, TlCl, TlBr und einige andere Substanzen mitgeteilt; sie zeigen sich, wie für Kristalle zu erwarten, annähernd der absoluten Temperatur umgekehrt proportional.

Auf die auffallende Ähnlichkeit des relativen Verlaufs der Wärmeleitfähigkeit mit dem des spezifischen Volumen der betreffenden Substanzen (qualitativ genommen) wird hier aufmerksam gemacht. Umfangreichere Daten und eine Erörterung der Resultate und der Methode werden in einer ausführlichen Mitteilung folgen.

Berlin, Physikalisch-Chemisches Institut 1918.

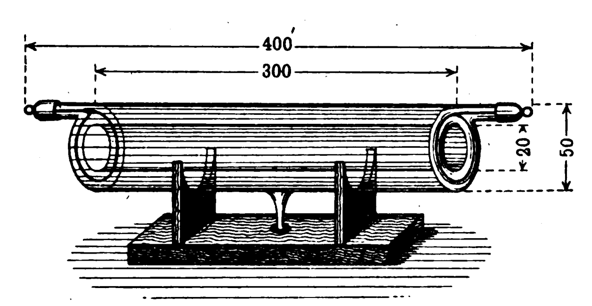
„Elektrisches Ei“ mit zugänglichem inneren Hohlraum;

von Walther Biegon von Czudnochowski.

(Eingegangen am 30. März 1918.)

---

1. Ein zur Untersuchung der elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen sehr geeigneter und viel benutzter Apparat ist das sogenannte „elektrische Ei“, ein ellipsoidisches Glasgefäß mit senkrechter großer Achse, durch Stopfbüchse abgedichteter verschiebbarer oberer Elektrode, einer festen unteren Elektrode und Planfuß zum Aufsetzen auf einen Luftpumpenteller zwecks Auspumpens. Dieser Apparat wird auch als „elektrisches Ei nach De la Rive“ mit einer unteren ringförmigen Elektrode und zentrischer Einstülpung zwecks Aufnahme eines stabförmigen



Eisenkernes zur magnetischen Beeinflussung des Vakuumlichtbogens hergestellt.

Für manche Zwecke störend ist hierbei die Asymmetrie der Elektroden, auch ist die Brauchbarkeit, abgesehen von Versuchen betreffend magnetische Einflüsse, zu weiteren Untersuchungen, z. B. der elektrostatischen Beeinflussung der Vakuumentladung sehr beschränkt.

2. Im Gegensatze dazu ist der in der obenstehenden Abbildung dargestellte Apparat zu derartigen Untersuchungen in weitem Umfange verwendbar.

Der Apparat besteht aus einem im ganzen röhrenförmigen Glasgefäß, dessen Inneres, wie ersichtlich, ohne weiteres zugänglich ist, so daß man Funkenstrecken, kleine Kondensatoren, Spiralen für Induktionsversuche u. dgl. in die Mitte des ein hohlzylindrisches Vakuum darstellenden Entladungsfeldes einführen kann.

3. Der beschriebene Apparat ist somit recht vielseitig verwendbar. Man hat es, zumal wenn man ihn mit Ansatzrohr, entweder mit Schliff zum unmittelbaren Anfügen an eine Quecksilberluftpumpe, oder ohne solchen zum Aufschieben eines starkwandigen Schlauches zwecks Verbindung mit einem in den Teller einzuschraubenden Schlauchstück zum Auspumpen mit Hilfe einer gewöhnlichen Kolbenhandluftpumpe versieht, in der Hand, das Vakuum und damit die Lichterscheinung in zweckentsprechender Weise einzustellen bzw. zu verändern.

4. Es empfiehlt sich, den Apparat in der durch die Abbildung dargestellten Weise auf einem Gestelle zu montieren, wobei der Abschmelzzapfen in ein mit einem durchbohrten Korke ausgefüttertes Loch des Grundbrettes gesteckt wird, so daß er vor Beschädigungen geschützt ist. Das Rohr selbst kann durch an den Stellen der beiden Auflager umgelegte Tuchstreifen und darüber gelegte, an den Enden zu Ösen gebogene und an diesen mittelst Schrauben befestigte Drahtbügel fest mit dem Gestell verbunden werden.

5. Der Apparat ist seinerzeit von der Firma MAX STUHL in Berlin hergestellt worden und mit Rücksicht auf die wenig einfache Form nicht ganz billig; doch rechtfertigt sich der höhere Preis durch die vielfältige Brauchbarkeit [1]), welche den Apparat zu einem Gegenstücke des früher beschriebenen „Vakuumuniversalapparates“ [2]) und der „selbsttätig sich einstellenden Vakuumskala“ [3]) des Verfassers macht.

Berlin, den 2. Januar 1918.

---

[1]) Die wichtigsten Verwendungen sind: a) Vakuumentladungen in Luft schlechthin; b) magnetische Beeinflussung der Vakuumentladungen, Rotationen, Verschiebung der Stromfäden usw.; c) elektrostatische Ablenkung; d) elektromagnetische Induktion im Vakuum; e) elektrostatische Induktion; f) Lichterscheinungen im Vakuum durch Induktion mittels elektrischer Schwingungen.

[2]) Phys. ZS. **3**, 366—368, 1902; Verh. d. D. Phys. Ges. **7**, 31—32, 1905.

[3]) Verh. d. D. Phys. Ges. **9**, 136—144, 1907.

Verhandlungen

der

Deutschen Physikalischen Gesellschaft

Im Auftrage der Gesellschaft herausgegeben

von

Karl Scheel

20. Jahrg. **30. August 1918.** **Nr. 13/16.**

Sitzung vom 14. Juni 1918.

Vorsitzender: Hr. A. EINSTEIN.

Vor Eintritt in die Tagesordnung verkündet der Vorsitzende den Tod zweier Mitglieder der Gesellschaft:

Geh. Ober-Regierungsrat Prof. Dr. **Richard Assmann**

† 28. Mai 1918

seit dem Jahre 1887 der verdienstvolle Redakteur der dritten Abteilung der von der Gesellschaft herausgegebenen „Fortschritte der Physik“ und

Dr. **Max Iklé**

† 31. Mai 1918.

Die Anwesenden ehren das Andenken der Verstorbenen durch Erheben von ihren Sitzen.

Sodann spricht Hr. **A. Einstein**

1. über ein auf Totalreflexion hindeutendes Randphänomen bei Röntgenphotographien;
2. über den Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie.



Sitzung vom 28. Juni 1918.

Vorsitzender: Hr. Karl Scheel.

Hr. **M. Born** berichtet

über die Berechnung der Ionenladung aus Messungen der Reststrahlen, der ultraroten Brechungsindizes und der Dielektrizitätskonstante.

Als Mitglieder wurden in die Gesellschaft aufgenommen:

Hr. cand. phys. G. Thilo, Breslau, Opitzstr. 16, z. Z. Leutnant d. R., Führer des Versuchs-Meßtrupps 21, Schießplatz Kummersdorf, Militärbahn.
(Vorgeschlagen durch Hrn. R. Ladenburg.)

Hr. Prof. Richard Lorenz, Frankfurt a. M., Robert Mayer-Straße 1.
Hr. Prof. Philipp Frank, Prag II, Weinberggasse 3.
Hr. Prof. Arthur Haas, Leipzig, Physik. Institut der Universität.
Hr. Dr. Theodor Pöschl, Prag, Deutsche Technische Hochschule.
Hr. Prof. Dr. Max Winkelmann, Jena, St. Jacobstraße 20.
Hr. Prof. Constantin Caratheodory, Göttingen, Friedländerweg 31.
Hr. Prof. R. Courant, Göttingen, Universität, z. Z. Ilsenburg, Endbat-Versuchszug.
Hr. G. Varga, Göttingen, Institut für anorganische Chemie, und Budapest VII, Elisabethring 39.
Frl. W. Stücklen, Göttingen, Hainholzweg 20.
Hr. W. Baade, Göttingen, Hainholzweg 30.
Hr. Dr. W. Gordon, Berlin-Schöneberg, Vorbergstraße 14.
(Sämtlich vorgeschlagen durch Hrn. P. Debye.)

Hr. Dr. Otto Silberberg, Spezialarzt für Chirurgie, Röntgenverfahren und Strahlentherapie, Breslau, Hohenzollernstraße 63—65.
(Vorgeschlagen durch Hrn. Cl. Schaefer.)

Hr. Dr. Hans Schneider, Berlin-Steglitz, Bismarckstraße 8.
(Vorgeschlagen durch Hrn. A. Gehrts.)

Sitzung vom 12. Juli 1918.

Vorsitzender: Hr. H. RUBENS.

Hr. **R. Seeliger** spricht

über die Struktur des Windes.

Als Mitglieder wurden in die Gesellschaft aufgenommen:

Hr. OTTO EISENHUT, Lehramtspraktikant d. Mathem. u. Physik, Leutnant d. R., z. Z. Lehrer an der Art.-Meßschule Wahn (Rheinl.), Lichtmeßabteilung.
(Vorgeschlagen durch Hrn. J. KRÖNERT.)

Hr. Dr. PAUL NEUBERT, Leutnant d. R., Leipzig, Ferdinand Rhodestraße 23, z. Z. Flugplatz Döberitz, F. T. Versuchsabteilung.
(Vorgeschlagen durch Hrn. FELIX JENTSCH-GRAEFE.)

Sitzung vom 26. Juli 1918.

Vorsitzender: Hr. A. SOMMERFELD.

Hr. **A. Sommerfeld** spricht

über Röntgenspektren.

Der Vortrag schildert — im Anschluß an eine Veröffentlichung in der Physikalischen Zeitschrift — die Schwierigkeiten, die dem Aufbau des BOHRschen Atommodelles aus mehrfach besetzten Ringen, insbesondere solchen mit elliptischer Bahn, entgegenzustehen scheinen, und beseitigt sie durch die Vorstellung des „Ellipsenvereins“ (System kongruenter, symmetrisch gestellter, von je einem Elektron beschriebener Ellipsen). Für die Besetzungszahlen der Ringe liefern die Periodenzahlen des natürlichen Systems der Elemente einen ungefähren Anhalt. Prüfung dieser Zahlen an den Beobachtungen über das Abbrechen der Linien K_β und K_γ bei niedrigen Ordnungszahlen und an den Schwingungszahlen von K_α. Zu der Energiebilanz von K_β (Übergang eines Elektrons aus dem M-Ring in den K-Ring) liefert auch der L-Ring einen Beitrag, da er bei jenem Übergang expandiert. Hieraus folgt zugleich, daß K_β ein Dublett sein muß. Messungen von SIEGBAHN scheinen dies zu bestätigen. Der Vergleich des K_β- und des K_α-Dubletts gestattet eine scharfe Bestimmung der Besetzungszahl des L-Ringes.

Als Mitglieder wurden in die Gesellschaft aufgenommen:

Hr. Dr. ALBERT BACHEM, Assistent am physikalischen Institut der Universität Bonn, Colmantstraße 14.
(Vorgeschlagen durch Hrn. R. POHL.)

Hr. Dr. FÖRSTERLING, Privatdozent an der Technischen Hochschule Danzig, z. Z. Beamter beim Militär-Vermessungsamt, Berlin-Wilmersdorf, Zähringerstraße 26.
(Vorgeschlagen durch Hrn. FRITZ NOETHER.)

Hr. Dr. MAX VOLMER, Privatdozent an der Universität Leipzig, z. Z. Berlin NW. 52, Gerhardtstraße 7.
(Vorgeschlagen durch Hrn. W. NERNST.)

Hr. Dr. phil. WALTER GROTRIAN, Leutnant d. R., z. Z. im Felde, Aachen, Vogelgasse 3.
(Vorgeschlagen durch Hrn. O. GROTRIAN.)

Der Polarisationsspiegel und die allgemeine Polarisationsfläche;

von Felix Jentzsch-Gräfe.

(Eingegangen am 5. Juli 1918.)

Läßt man ein Strahlenbündel (d. h. die Gesamtheit aller Strahlen durch einen Punkt im Raum) unter dem Polarisationswinkel auf die ebene Oberfläche eines einfachbrechenden, nicht metallisch absorbierenden Körpers auffallen, so weisen keineswegs alle reflektierten Strahlen geradlinige vollständige Polarisation auf, sondern nur diejenigen, deren Einfallswinkel die Bedingung des BREWSTERschen Gesetzes

$$\alpha = \operatorname{arctg} n = \text{const}$$

erfüllen. Außerdem werden wegen der Dispersion bei jeder Wellenlänge andere Strahlen von anderer Richtung dieser Bedingung genügen.

Man kann deshalb an einem ebenen Spiegel der oben bezeichneten Art nur bestimmte ebene monochromatische Wellen durch Reflexion geradlinig polarisieren. Für jeden optischen Apparat sind aber viele gegeneinander mehr oder minder geneigte Wellenzüge erforderlich. Auch im sogen. „parallelen" Strahlengang hat man, schon der Ausdehnung unserer Lichtquellen wegen, verschiedene gegeneinander geneigte Wellenfronten. Streng genommen also kann man mit einem ebenen Spiegelpolarisator niemals ein gleichmäßiges Gesichtsfeld erzielen. Die Abweichungen sind auch bei monochromatischem Licht zweierlei Art. Die geradlinige Polarisation kann in verschiedenen Teilen des Gesichtsfeldes verschiedene Richtung haben und außerdem unvollständig sein.

Betrachten wir ein Lichtbündel von kreisförmigem Querschnitt, wie es etwa das Gesichtsfeld des Auges vorstellt, wenn wir die Pupille sehr klein annehmen, und nennen wir α_0 den Winkel der Achse dieses Bündels (des Hauptsehstrahles) mit der Normalen des Spiegels, so fällt ein anderer Strahl dieses Bündels unter dem Winkel $\alpha_{\vartheta,\varphi}$ auf, wobei φ der halbe Öffnungswinkel des Bündels und ϑ das Azimut der Strahlen sein sollen. Dabei soll $\varphi = 0$ die Achse des Bündels darstellen und $\vartheta = 0$ den Strahlen ent-

sprechen, die in der durch den Hauptstrahl und die Spiegelnormale festgelegten Meridianebene verlaufen. Es werde ϑ dabei (von der Bündelspitze aus gesehen) im Sinne des Uhrzeigers gezählt und die Zählung am oberen Schnittpunkt der Meridianebene begonnen (Fig. 1).

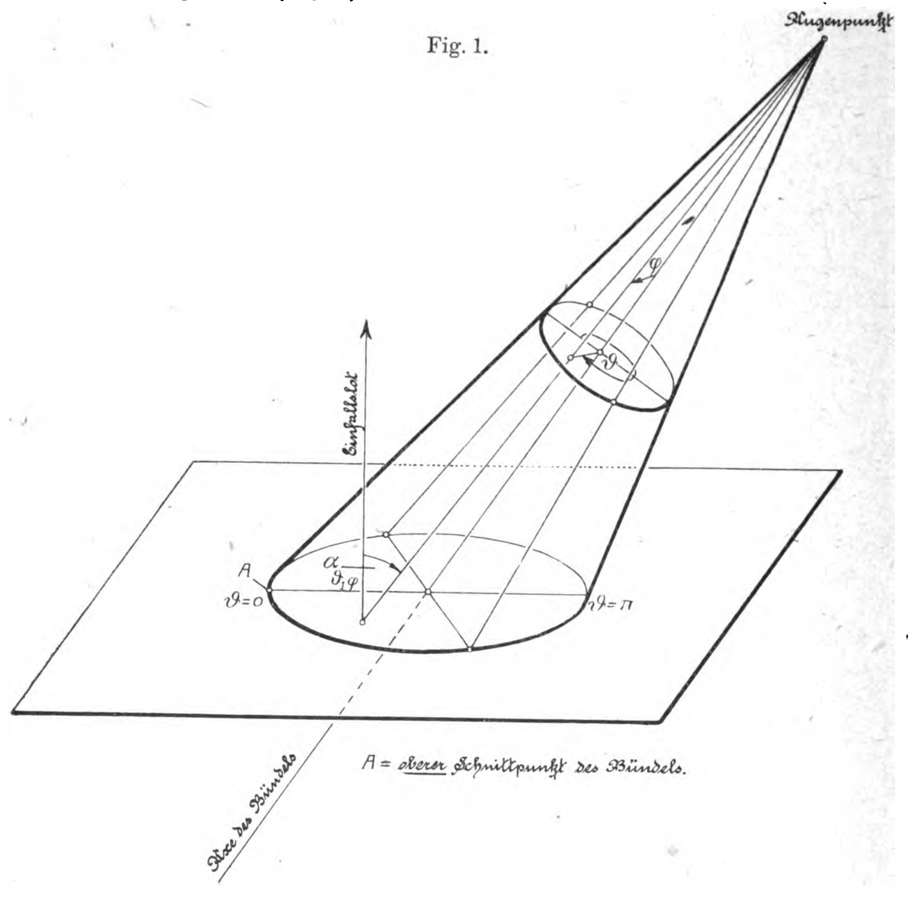


Fig. 1.

Dann ergibt sich aus dem Augenschein, daß für kleine Variationen von φ die Änderung der Einfallswinkel in der Meridianebene am größten ($\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$), senkrecht dazu am kleinsten ist. Für kleine Variationen von ϑ ist die Änderung des Einfallswinkels am kleinsten in der Meridianebene, senkrecht dazu am größten. In der Tat beobachtet man auch dementsprechend in

der Dunkelstellung einen schwarzen Balken senkrecht zur Meridianebene, der wegen der Unempfindlichkeit unseres Auges eine beträchtliche Winkelbreite hat. Letztere schwankt natürlich mit der Stärke der Beleuchtung. Dieser dunkle Balken ist leicht gekrümmt, die konkave Seite dem Beschauer zugewandt, d. h. den Werten $\vartheta = \pi$. Mit allmählichem Übergange findet man außerhalb der Achse partiell linear bzw. elliptisch polarisiertes Licht, dessen große Achse gegen die Meridianebene in verschiedenem Maße gedreht

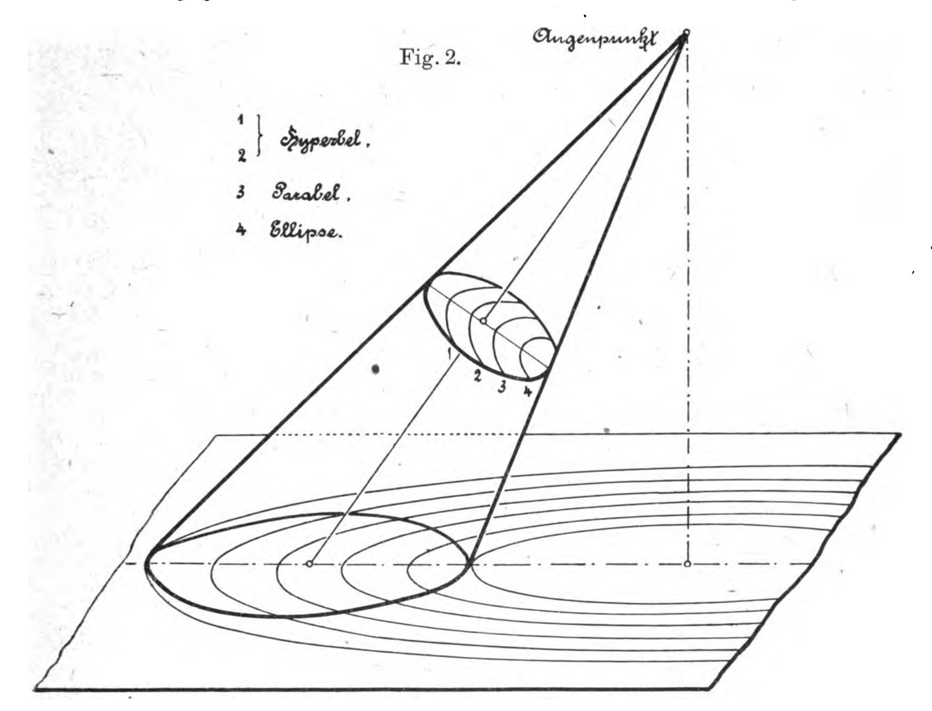


Fig. 2.

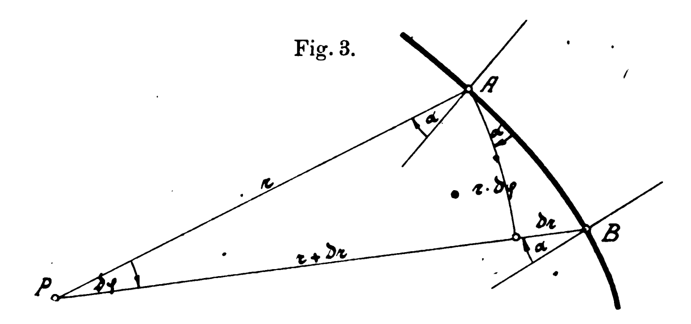
ist. Die Linien gleicher Intensität, also die Linien gleichen Reflexionswinkels, sind auf der Spiegelebene augenscheinlich konzentrische Kreise um den Fußpunkt des vom Auge auf den Spiegel gefällten Lotes (Fig. 2). Projiziert auf das senkrecht zur Hauptblickrichtung liegende „Sehfeld“ sind es Kegelschnitte, und zwar: im unteren Teile des Gesichtsfeldes Ellipsenbögen, im oberen Hyperbelbögen. Dazwischen liegt ein Parabelbogen. Diesem entspricht der Kreiskegel mit dem halben Öffnungswinkel $90^0 - \alpha_0$. Fällt die Blickrichtung unter 45^0 auf den Spiegel, so geht der

Parabelbogen durch die Mitte des Gesichtsfeldes. Die Scheitel aller Bögen liegen in der Meridianebene. Da das Sehfeld, das man durch ein optisches Polarisationsinstrument überblickt, selten größer als 30° bis 40° sein wird und der Polarisationswinkel bei Gläsern immer die Größenordnung 56° bis 60° hat, so liegt die Parabel im allgemeinen nicht im Gesichtsfeld, das vielmehr nur von Hyperbelbögen ausgefüllt ist.

Ist die Vergenz der Strahlen gering, so kann man eine ebene Glasplatte bzw. einen Glasplattensatz sehr wohl als Polarisator benutzen und auch in optischen Instrumenten aller Art in einem sogen. parallelen Strahlengang praktisch unbedenklich verwenden.

Für konvergentes Licht dagegen macht sich die Ungleichmäßigkeit des Sehfeldes auch praktisch störend bemerkbar. Hier

Fig. 3.



erweist sich ein einfaches Hilfsmittel als vorteilhaft, das von Herrn Dr. Reuter (in Firma Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. H.) gefunden wurde, aber noch wenig bekannt zu sein scheint. Man krümmt den Polarisationsspiegel so weit, daß alle von dem Konvergenzpunkt aus gezogenen Strahlen den Spiegel unter dem gleichen Einfallswinkel treffen. Dr. Reuter hat mir einen derartigen empirisch gekrümmten Spiegel bereits im Jahre 1913 vorgeführt.

Hier soll nun die Frage erörtert werden, welche Kurve bzw. Fläche diese Bedingung befriedigt. Herr Dr. Reuter hat sich, wie er mir mitteilte, mit dieser theoretischen Frage nicht beschäftigt, sondern sich mit dem praktischen Erfolge des empirischen Durchbiegens einer Spiegelplatte begnügt. Und zwar verwandte er nur eine allgemeine Zylinderfläche, was praktisch in den meisten Fällen genügen wird.

Das ebene Problem ist sofort gelöst. In den Lehrbüchern findet man als Eigenschaft der logarithmischen Spirale angegeben, daß die Verbindungslinien eines Kurvenpunktes mit dem Pol stets den gleichen Winkel mit den Tangenten bilden.

Auch auf direktem Wege kann man leicht das Resultat finden (Fig. 3). Sei AB ein Stück der gesuchten Kurve und P der Augenpunkt bzw. der Pol, so sollen also die Winkel α, d. h. die Winkel zwischen den beliebigen Lichtstrahlen PA und PB mit den Kurvennormalen in A bzw. B einander gleich sein. Nun ist in dem kleinen Dreieck der Figur

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dr}{r\,d\varphi},$$

also integriert

$$\ln r = \varphi \operatorname{tg}\alpha + \text{Const.}$$

Unter Berücksichtigung des Brewsterschen Gesetzes $\operatorname{tg}\alpha = n$, wo n der Brechungsindex des Spiegels ist, hat man

$$\underline{r = c\,.\,e^{n\varphi}.}$$

Die gesuchte Kurve ist also eine logarithmische Spirale. c ist der Wert des Radius für $\varphi = 0$.

Für das räumliche Problem begnügen wir uns damit, die Differentialgleichung einer Fläche aufzustellen, deren Normalen in jedem Punkt den gleichen Winkel mit dem zugehörigen Leitstrahl von einem Pol P aus bilden. Wegen der Herkunft dieser Aufgabe nennen wir die gesuchte Fläche die allgemeine Polarisationsfläche.

Sei diese Fläche in der Form $F(x, y, z) = 0$ gegeben, so sind

$$\lambda = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \quad \mu = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}},$$

$$\nu = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

die Richtungskosinus ihrer Normalen. Seien ferner

$$p = \frac{x}{r}, \quad q = \frac{y}{r}, \quad s = \frac{z}{r}$$

die Richtungskosinus des Strahles, so gilt nach bekannter Formel für den Winkel α zwischen Strahl und Normale

$$\lambda p + \mu q + \nu s = \cos\alpha.$$

Durch Einsetzen der Werte folgt sofort die Differentialgleichung der gesuchten Fläche.

$$F_x . x + F_y . y + F_z . z = r \cos \alpha \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Wir führen Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi \cos \vartheta$$
$$z = r \sin \varphi \sin \vartheta$$

ein. Dann geht Gl. 1) über in die Form

$$F_r = \cos \alpha \sqrt{F_r^2 + \frac{1}{r^2} F_\varphi^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} F_\vartheta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

oder auch

$$F_r . r . n = \sqrt{F_\varphi^2 + \frac{1}{\sin^2 \varphi} F_\vartheta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2a)$$

wobei $n = \operatorname{tg} \alpha$ gesetzt ist, gemäß dem BREWSTERschen Gesetze. Da das ebene Problem auf eine logarithmische Spirale führte, sei der Ansatz

$$F(r, \vartheta, \varphi) = \log r - f(\vartheta, \varphi) = 0$$

versuchsweise eingeführt, wobei also f eine Funktion von ϑ und φ allein sein soll. Dann wird aus 2a)

$$n^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Eine Lösung davon ist jedenfalls

$$f = n \varphi + \text{const},$$

also

$$\underline{r = c . e^{n \varphi}},$$

d. h. die aus der Rotation einer Spirale entstehende Fläche. Diese Lösung ist auch leicht aus der Gleichung dieser Fläche in kartesischen Koordinaten

$$x^2 + y^2 + z^2 = e^{2 b \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x}}$$

zu verifizieren.

Für die Praxis als einfachster und interessantester Fall ergibt sich also:

Denkt man sich eine ebene logarithmische Spirale mit dem Steigungswinkel $\alpha = \operatorname{arctg} n$ um einen Radiusvektor mit ihrer Ebene gedreht, so entsteht eine Polarisationsfläche mit dem Polarisationswinkel α.

Dies ergibt praktisch die Möglichkeit, je nach Wunsch Polarisationsspiegel von starker oder schwacher Krümmung herzustellen, je nach dem Stück der logarithmischen Spirale, das man um die angegebene Achse rotieren läßt.

Zur Untersuchung, ob noch andere Rotationsflächen Polarisationsflächen sind, führen wir in Gl. 2a) als Bedingung der Rotationssymmetrie $F_\vartheta = 0$ ein. Dann wird

$$F_r . r . n = F_\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist, wie sich leicht verifizieren läßt,

$$F = g(\log r + n\varphi),$$

wo g eine beliebige Funktion vom Argument $\log r + n\varphi$ ist, so daß also in der Tat die Rotationsfläche der logarithmischen Spirale die einzige Rotationsfläche ist, die zugleich eine Polarisationsfläche ist.

Die Untersuchung der allgemeinen Polarisationsfläche vom differential-geometrischen Standpunkt aus, hat Herr Professor Baldus in Erlangen übernommen. Die interessanten Ergebnisse sind von ziemlich weitgehender Bedeutung und bilden den Inhalt einer demnächst erscheinenden mathematischen Arbeit, deren physikalische und technische Bedeutung später hier besprochen werden soll.

Ich möchte nicht unerwähnt lassen, daß ich das Problem der Polarisationsfläche im Frühjahr 1914 mit meinem Bruder Robert Jentzsch, Privatdozent der Mathematik in Berlin, seitdem am 21. März 1918 gefallen, eingehend besprochen habe, der mir wertvolle Hinweise gab.

Den wesentlichen Inhalt der vorliegenden Arbeit habe ich bereits im Juni 1914 im physikalischen Kolloquium in Gießen vorgetragen.

Flugplatz Döberitz, im Juni 1918.

Über eine Quantentheorie der Absorption;
von Witold Kasperowicz.

(Eingegangen am 14. Juli 1918.)

Eine einwandfreie Anwendung der Quantentheorie auf die Absorption konnte bekanntlich nicht durchgeführt werden, so daß die Quantentheorie zurzeit nur für Emission gilt. Im weiteren wird gezeigt, daß auch eine Quantentheorie der Absorption möglich ist, wenn man den Absorptionserscheinungen entsprechende Grundlagen wählt. In einer anderen Veröffentlichung[1]) hat der Verfasser einige Grundlagen einer Stoßtheorie der Strahlung aufgestellt, welche auf der Betrachtung der Stoßerscheinungen zwischen den Elementen des strahlenden Körpers entwickelt wird. Es läßt sich entsprechend eine Stoßtheorie der Absorption bilden, wodurch ein gewisser Zusammenhang mit einer Quantentheorie der Absorption bedingt wird. Das Elementarquantum

$$\varepsilon = h\nu$$

ist durch die elektronisch-molekularen Verhältnisse gegeben und bildet eigentlich ein Emissionsquantum. Das Absorptionsquantum ist dagegen durch die Wechselwirkung zwischen einem Strahlungsfeld und einem Absorptionssystem bedingt und muß deswegen viel kleiner als das Emissionsquantum sein. Im weiteren wird zwischen einem Emissionsquantum ε_e und einem Absorptionsquantum ε_a ein Unterschied gemacht; das Absorptionsquantum ist eigentlich ein Unterquantum. Mit Hilfe dieser Annahme kann man eine Quantentheorie der Absorption und des Strahlungsfeldes entwickeln.

Ein Energiequantum ε besteht entweder aus einem Emissionsquantum ε_e oder aus einer Anzahl von Unterquanten ε_a (Absorptionsquanten oder Strahlungsquanten ε_s). Es bestehen die folgenden Beziehungen

$$\varepsilon = \varepsilon_e \qquad \varepsilon = n\,\varepsilon_a,$$

wobei die Zahl n entweder eine Konstante a ist,

$$n = \text{const} = a$$

---

[1]) Stoßtheorie der Strahlung. Schweiz. Elektrot. ZS. 1918, 194—195.

oder ein Vielfaches von a, wobei das Vielfache durch das Energiequantum ε bestimmt ist. Das Verhältnis

$$\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_a} = \text{const} \quad \text{oder} \quad \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_e} = \text{const}$$

ergibt den zahlenmäßigen Zusammenhang zwischen dem Energiequantum und dem Unterquantum, es ist

$$\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_a} = a \qquad \varepsilon_a = \frac{\varepsilon_e}{a},$$

wobei die gerade Zahl a zur Ermittlung dieses Zusammenhanges dient. Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen läßt sich der Mechanismus der Quantenemission weiter entwickeln.

In der Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Emissionen wächst die Energie U eines Oszillators in einem Strahlungsfelde quantenhaft, der Oszillator absorbiert die Strahlung in Form von Unterquanten. Wenn man das Strahlungsfeld als kontinuierlich annimmt, so wird im einfachen Falle der Oszillator ein Energiequantum ε aufnehmen, welches ein totales Absorptionsquantum ist,

$$\sum_1^a \varepsilon_a = n\,\varepsilon_a = \varepsilon_e.$$

Das totale Absorptionsquantum wird während der Zeit

$$\tau = \frac{a}{\nu}$$

aufgenommen, die Zeit τ ist die elementare Absorptionsdauer. Eine Zeit t zwischen zwei Emissionen kann also im einfachsten Falle gleich der Dauer τ einer Absorption sein, aber nicht kleiner:

$$t_{\min} = \tau = \frac{a}{\nu}.$$

Wenn ein Oszillator in der Zeit zwischen zwei Emissionen eine quantenhaft gleichmäßige Absorption aufweist, so ist das Intervall zwischen zwei Emissionen quantenhaft veränderlich,

$$t_a = m\,\tau,$$

wobei m eine ganze Zahl ist. Der Absorptionsmechanismus besitzt also eine quantenhafte Zeiteinteilung.

Wenn man eine quantenhafte Struktur des Strahlungsfeldes annimmt, so kann die Absorption in Unterquanten nach der Zufallsfunktion stattfinden, wobei die Energiequanten ε_s des Strahlungsfeldes gleich den Unterquanten ε_a der Absorption sein können:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_a.$$

Inwieweit eine solche Quantentheorie der Absorption verwendbar ist, dürfte erst ihre weitere Entwicklung zeigen.

Zürich, den 7. Juli 1918.

Über elastische Nachwirkung bei Metallen; von H. v. Wartenberg.

(Eingegangen am 8. August 1918.)

---

§ 1. Deformiert man ein Metallstück in dem Gebiet unterhalb der Elastizitätsgrenze, so geht bekanntlich die Deformation nach der Entlastung nicht sofort vollkommen zurück, sondern erst allmählich. Die zu einer beliebigen Zeit nach der Entlastung noch vorhandene Entfernung von der Gleichgewichtslage dividiert durch die anfängliche Entfernung von ihr nennt man nach KOHLRAUSCH die elastische Nachwirkung.

Über dieselbe sind viele Theorien aufgestellt, von denen die bekanntesten die von BOLTZMANN und von WIECHERT sind, welche den Verlauf der Nachwirkung mathematisch gut darstellen (sie verläuft nach einer e-Funktion oder bei WIECHERT nach einer Summe von solchen), in ihren Grundannahmen aber sehr hypothetisch sind [(Aufbrechen von Gruppen von Molekülen (MAXWELL) Drehungen von nicht kugelförmigen Molekülen (WARBURG)] oder nur mathematische Fiktionen zugrunde legen (BOLTZMANN, WIECHERT).

Die moderne Metallographie scheint nun an Hand der besonders von TAMMANN[1]) entwickelten Lehre von der Metalldeformation ein Mittel zu bieten, die bisherigen Versuche zu erklären, wenn man von folgenden Grundannahmen ausgeht. Ein Metallstück ist ein Haufen unregelmäßig orientierter Kristallite. Wird es über seine Elastizitätsgrenze deformiert, so werden diese teils gegeneinander, teils in sich längs ihren Gleitflächen verschoben. Nun werde angenommen, daß ein Teil durch ihre zufällige Orientierung besonders stark beanspruchter Kristallite bei der Deformation des Metallstückes auch unterhalb der Elastizitätsgrenze des ganzen Stückes gegeneinander oder in sich verschoben wird, während der größte Teil sich nur elastisch verbiegt. Tordieren wir z. B. einen Draht um den Winkel φ, so mögen sich 1 Proz. der Kristallite wirklich verschieben. Beim Aufhören der Torsion

---

[1]) TAMMANN, Lehrbuch der Metallographie 1914, S. 54 ff.

schieben die elastischen Kräfte der 99 Proz. unveränderten Kristallite diese wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück unter langsamer Überwindung der Reibungskräfte. Je größer φ war, um so mehr und ausgedehnter sind Kristallite verschoben, um so mehr Reibung muß also beim Zurückdrehen überwunden werden. Die Nachwirkung muß also der Erfahrung entsprechend proportional der vorangegangenen Deformation sein. Ferner ist bei sich reibend aneinander bewegenden Körpern bekanntlich die Geschwindigkeit proportional nicht der Beschleunigung, sondern der treibenden Kraft. Die treibende Kraft ist hier die elastische Spannung s der unverschobenen Kristallite, die den Draht mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ zurückdreht. s ist aber bekanntlich proportional φ, d. h. auch $\frac{d\varphi}{dt}$ ist proportional der in jedem Moment noch vorhandenen treibenden Kraft s oder die Abnahme des Drehungswinkels mit der Zeit erfolgt nach einer e-Funktion. Da aber verschieden orientierte Kristallite mit verschieden geneigten Gleitflächen vorhanden sind, wird man der mathematischen Darstellung der Beobachtungen von Wiechert entsprechend eine ganze Reihe solcher e-Funktionen nötig haben. Daß in der Tat auch unterhalb der Elastizitätsgrenze ein erheblicher Teil der zur Deformation aufgewendeten Arbeit in Reibungsarbeit umgesetzt wird, zeigen die Messungen von Barus [1]), der fand, daß beim Spannen von Drähten bei Kupfer bzw. Eisen nur 25 bzw. 50 Proz. der aufgewendeten Energie als elastische Spannung im Draht steckten, der übrige Teil in kalorimetrisch meßbare Arbeit umgewandelt wurde; beim weicheren Kupfer also übrigens mehr als beim härteren Eisen.

Die aufgestellte Theorie, welche an die Maxwellsche vom „Aufbrechen von Molekülgruppen“ erinnert, vermag also zunächst die quantitative Form des Ablaufes der Nachwirkungserscheinungen zu erklären. Es seien im folgenden nun noch die wichtigsten sonstigen Phänomene erörtert.

§ 2. Die elastische Nachwirkung ist bei ganz tiefen Temperaturen (flüssige Luft) Null [2]) und nimmt stark mit der Temperatur

---

1) Barus u. Winkelmann, Handbuch d. Physik 1908, I, 835.
2) Cl. Schäfer, Ann. d. Phys. (4) 5, 232, 1901.

zu. Mit der Temperatur nimmt auch die Neigung zur Gleitflächenbildung rasch zu. Bei 10° Temperaturerhöhung wächst die Ausflußgeschwindigkeit von bis zum Fließen in ihren Gleitflächen deformierten Metallen auf das Doppelte [1]); auch unterhalb der Grenze der bleibenden Deformation wird also die Menge der sich verschiebenden Kristallite steigen und damit die Zurückführung in die Gleichgewichtslage mehr Zeit erfordern. Aus demselben Grunde ist auch die Nachwirkung bei weichen Metallen wie Blei, Magnesium, die schon bei Zimmertemperatur zum Fließen zu bringen sind, erheblich größer als bei harten, wie Stahl, Neusilber, Phosphorbronze. Ein gutes Beispiel hierfür bietet auch eine Anzahl von Legierungen der Metallpaare Cu Ag, Cu Ni, Cu Au, Cu Zn, Ag Pd, bei denen der Zusammenhang zwischen Zusammensetzung und Nachwirkung beobachtet ist [2]). Bei allen sinkt die Nachwirkung vom reinen Metall ausgehend schnell beim Zusatz des anderen zu einem breiten Minimum. Alle diese Metallpaare bilden aber Mischkristalle oder feste Lösungen, d. h. Legierungen, deren Schliffbilder eine viel feinkörnigere, verwaschenere Struktur zeigen als die scharfe eckige Polygone zeigenden reinen Metalle. Nun hat KURNAKOW [3]) gezeigt, daß durchweg mischkristallhaltige Legierungen härter sind als ihre Komponenten (gemessen nach der Brinellprobe, d. h. nach dem Eindruck einer Stahlkugel), ferner daß Brinellhärte und Fließdruck in dem für letzteren experimentell zugänglichen Gebiete durchaus parallel laufen. Man kann also Brinellhärte, Fließdruck und Neigung zu innerer Verschiebung als gleichbedeutend setzen. Bei weichen Metallpaaren wie Pb Tl, Pb In, ließ sich auch geradezu das Anwachsen des Fließdruckes vom reinen Metall ausgehend zu einem breiten Maximum nachweisen. Die Metallpaare Cu Au, Cu Ni, Cu Zn, Cu Ag, sind auch besonders auf ihre Brinellhärte untersucht [4]) und zeigen alle ein breites Maximum derselben bei etwa 50 Proz. Mischung, bis auf Cu Zn, dessen Härte erst von etwa 35 Proz. an rapide steigt, während die Nachwirkung schon bei 10 Proz. erheblich gesunken ist. KURNAKOW zeigte weiter, daß das elektrische Leitfähigkeits-

---

[1]) TAMMANN, l. c., S. 62 u. WINKELMANN, Handbuch I, 880.

[2]) Tätigkeitsbericht d. Phys.-Techn. Reichsanstalt; ZS. f. Instrkde. **27**, 111, 1907.

[3]) KURNAKOW, ZS. anorgan. Chem. **64**, 179, 1909.

[4]) KURNAKOW, ebenda **60**, 1 u. **68**, 123.

diagramm genau das Spiegelbild des Härtediagrammes ist, so daß man also aus diesem leichter zugänglichen Material auf die Nachwirkung schließen kann (aber nur, wenn anderweitig die Mischkristallbildung im vorliegenden Fall bekannt ist).

§ 3. Die Metalle gewöhnen sich an Deformationen, bei längerer Beanspruchung auch unterhalb der Elastizitätsgrenze, es tritt Akkommodation ein. Wird ein Draht erst nach links tordiert, dann sofort nach rechts, dann losgelassen, so dreht er sich nicht bloß nach links in die Ruhelage zurück, sondern windet sich weiter nach links auf und kehrt von da erst nach rechts in die Ruhelage zurück, als „ob er Gedächtnis für seine erste Deformation hätte". Diese Erscheinungen sind ganz plausibel. Die einmal verschobenen Kristallite lassen sich nicht rasch wieder zurückschieben, sondern bleiben verschoben und machen ihren Einfluß weiterhin geltend. Wird der Draht ferner gewaltsam lange in seiner deformierten Lage gehalten, so verschieben sich allmählich so viel Kristallite, bis die inneren Spannungen ausgeglichen sind und nach Aufhören des Zwangs der Draht „sich in diesen Zustand gewöhnt hat" und sich nicht mehr zurückdreht. Es ist schon lange bekannt, daß die Messungen der Bruchdehnung verschieden ausfallen je nachdem man rasch oder langsam zerreißt. Was aber in der Nähe der Elastizitätsgrenze geschieht mit der Mehrzahl der Kristallite, das geschieht mit einzelnen schon tief unterhalb derselben.

§ 4. Weiter wirken Erschütterungen, häufiges Erwärmen auf etwa 100° während der Belastung gleichfalls verkleinernd auf die Nachwirkung. Ein gezogener Draht besteht [1]), wie die mikroskopische Betrachtung angeätzter Drähte zeigt, aus zusammengerollten Lamellenpaketen, von denen die dünnsten bereits bei mäßigem Erwärmen zusammenschweißen, so daß weniger Kristallite vorhanden sind und damit die Nachwirkung kleiner wird. Da Drähte gewissermaßen aus lauter Stäben zusammengesetzt sind, die parallel der Drahtachse gerichtet sind, erklärt es sich auch, daß die Nachwirkung bei Torsion erheblich größer als bei Dehnung ist, indem die Stäbe sich leichter in ihrer Querrichtung gegeneinander verschieben bei Torsionen des Stabbündels

[1]) Tammann, l. c., S. 81.

als in ihrer Längsrichtung bei Dehnung, wo sie zerrissen werden müssen.

§ 5. Als ein wesentliches Argument gegen die BOLTZMANNsche Theorie wurde betrachtet[1]), daß verschiedene gleichzeitige Deformationen z. B. Torsion und Dehnung die Nachwirkung einer einzelnen, z. B. der Torsion, erfahrungsgemäß erheblich beeinflussen, während bei der bloßen Annahme von elastischen Kräften als Ursache der Nachwirkung ein solcher Einfluß nicht statthaben könnte. Aus der hier entwickelten Theorie folgt nun auch ohne weiteres, daß gleichzeitige verschiedene Deformationen ihren Einfluß auf die Nachwirkung der einzelnen Deformationen geltend machen müssen. Drehen und dehnen wir einen Draht gleichzeitig, so werden die bei bloßer Torsion überbeanspruchten Kristallite in anderer Weise und noch weitere, bloß durch die Dehnung beanspruchte Kristallite dazu sich verschieben, so daß beim Aufhören der Torsion die Torsionselastizität jetzt andere Reibungskräfte zu überwinden hat als bei bloßer Torsion. Ob die Einzelnachwirkung dabei vergrößert oder verkleinert wird, läßt sich ohne Kenntnis des Kristallsystemes der Kristallite, ihrer Kleinheit, Länge und Lagerung kaum voraussagen.

§ 6. Eine wichtige Bestätigung der entwickelten Theorie ist es, daß erfahrungsgemäß einheitliche Kristalle bei Deformation unterhalb der Elastizitätsgrenze keine oder höchstens kleine Nachwirkungen zeigen, da keine ungünstig gelagerten Kristallite vorhanden sind. In der Tat sind nur bei dem ungemein leicht verschiebbaren Steinsalz und Eis Nachwirkungserscheinungen gefunden. Bei dickeren Kristallen ist es sehr wohl denkbar, daß die am meisten beanspruchten Teile nachgeben und bei Aufhören der deformierenden Kräfte zurückgeschoben werden. Dünne Kristalle, wie z. B. die neuerdings hergestellten Metalldrahtkristalle dürften dagegen gegenüber gewöhnlichen Drähten keine Nachwirkung zeigen. Diese Folgerung wurde durch die im nachstehenden geschilderten Versuche auch in der Tat bestätigt.

§ 7. Zur Untersuchung kam die Torsionsnachwirkung des harten Wolframs und weichen Zinks und zwar vergleichend an gezogenen Drähten und Einkristalldrähten. Die Drähte wurden in einer Haltevorrichtung eingeklemmt und unten mit einer

---

[1]) WINKELMANN, Handbuch I, S. 807.

Messingplatte (bei Wolfram 55 g, bei Zink 250 g schwer) belastet, welche zur Dämpfung in einen Napf mit Öl tauchte. An dem Haltedraht der Messingplatte war noch ein Spiegel und ein Querbalken befestigt, durch welchen mit einer unabhängig aufgestellten Drehvorrichtung dem Drahte passende Torsionen erteilt werden konnten. Durch den Spiegel wurde das Bild eines Glühlampenfadens mit vorgesetzter Linse auf eine 1 m weit entfernte mm-Skala geworfen. Die ganze Vorrichtung war auf einer möglichst erschütterungsfreien Wandkonsole befestigt.

Als Wolframdrähte wurden teils gewöhnliche von der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft bezogene Drähte, teils von der Firma PINTSCH durch den Erfinder Direktor SCHALLER, in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellte Einkristalldrähte [1]) benutzt, und zwar 80 cm lange Stücke, da bei der nicht großen Nachwirkung des Wolframs lange Drähte mit starker Torsion (180°) verwandt werden mußten. Die gewöhnlichen Drähte wurden teilweise in Wasserstoff auf helle Rotglut erhitzt, um sie ähnlicher den bei Weißglut in Wasserstoff formierten Einkristalldrähten zu machen. Sie wurden dadurch nicht weicher.

Als Zinkdrähte wurden teils gewöhnliche Handelsdrähte, teils Einkristalldrähte benutzt, die nach dem interessanten Verfahren von CZOCHRALSKI [2]) hergestellt wurden. Das Verfahren beruht darauf, einen kleinen Zinkkristall mit der Kristallisationsgeschwindigkeit des Zinks (etwa 10 cm pro Min.) aus einem gerade auf der Schmelztemperatur erhaltenen Kristallbrei herauszuziehen. Nach freundlicher, brieflicher Ergänzung zu seinem veröffentlichten Verfahren gelingt dies nach CZOCHRALSKI ohne Schwierigkeiten, wenn man geschmolzenes Zink in einen Korkstopfen gießt, in den ein etwa 1 bis 2 cm breites, 1 bis 2 cm tiefes Loch gebohrt ist, dessen Wände durch heißes Metall angekohlt sind, und wartet, bis das Metall breiig wird und in diesem Zustand dank der schlechten Wärmeleitung des Korktiegels etwa 1 bis 2 Minuten bleibt. Man taucht nun einen spitz ausgezogenen Glasstab hinein, der an einem Faden hängt, welcher mit leicht während des Versuches veränderlicher Geschwindigkeit auf eine Welle aufgewickelt werden kann und dabei die mit Zink benetzte Glas-

---

[1]) Über Herstellung s. ZS. f. Elektrochem. **23**, 121, 1917.

[2]) CZOCHRALSKI, ZS. phys. Chem. **32**, 219, 1917.

spitze aus der Schmelze emporzieht, wobei es nach einiger Übung gelingt, einen bis 20 cm langen Zinkfaden nachziehen zu lassen. Am besten probiert man das Verfahren erst mit einem in der Hand gehaltenen Glasstäbchen. Zum Antrieb wurde ein Elektromotor benutzt, der mit starker Übersetzung auf eine sogenannte FARADAYsche Scheibe arbeitete, d. h. eine kleine Schnurrolle, auf deren mit Nut versehener Achse eine Gummischeibe (3 cm) verschiebbar saß, die senkrecht zu einer großen (20 cm) Messingscheibe angeordnet war und diese durch Reibung antrieb, so daß die Umdrehungszahl der Messingscheibenachse beliebig im Verhältnis 1:7 gegenüber der Gummischeibe verändert werden konnte. Man muß während des Versuches die Geschwindigkeit leicht ändern können, da die Kristallfäden sich das Metall aus den Zwischenräumen des Breis heraussaugen müssen und bald dicker und bald dünner werden. Lange Drähte habe ich nur mit ziemlicher Dicke (1 bis 1,5 mm) erhalten können, an denen außerdem alle paar Zentimeter etwa 2 bis 2,5 mm dicke Knoten saßen. Wie die Ätzung mit Salzsäure zeigte, bestanden die vierkantigen Drähte aus einem einzigen Kristall. Zu den Versuchen wurden möglichst gleichförmige 10 cm lange Stücke benutzt, welche in dem Torsionsapparat mit etwa $^1/_2$ cm langen Hülsen eingelötet wurden. Zum Vergleich wurden 10 cm lange Stücke von 1,4 mm dickem Zinkleitungsdraht benutzt. Bei der Dicke und Kürze der Fäden konnten nur kleine Torsionen von 5 und 10° verwandt werden. Trotzdem wurde schon die Elastizitätsgrenze überschritten, was sich dadurch zeigte, daß bei Entspannung der Draht auch nach abgelaufener Nachwirkung in eine beträchtlich von der ursprünglichen abweichende Ruhelage zurückkehrte.

Von den vielen Versuchen sind in umstehender Tabelle einige herausgegriffen. Zu der Tabelle ist nur zu bemerken, daß als erste Ruhelage (vor der Torsion) diejenige angenommen wurde, die der Draht 12 Stunden lang konstant beibehielt. 10° Torsion entsprechen bei 1 m Skalenabstand 200 mm Ablenkung.

Bei gezogenem Wolfram kehrt der Draht ohne bleibende Deformation wieder in seine erste Ruhelage zurück nach etwa 36 Stunden, bei Einkristalldrähten dagegen sofort ohne Nachwirkung [1]).

[1]) Diese Eigenschaft der Wolframeinkristalldrähte läßt sich in der Meßtechnik für Suspensionen, Federn u. dgl. vorteilhaft verwenden.



Metall	Wolfram							Zink				
	Gezogen				Einkristall			Gezogen		Einkristall		
Geglüht	—	—	ja	ja	—	—	⊥	—	—	—	—	—
Dicke in Millimeter	0,06	0,06	0,06	0,06	0,083	0,054	0,054	1,4	1,4	2	2	2
Torsionsdauer in Minuten	60	1500	50	1400	30	70	1200	12	14	12	5	15
Torsionswinkel in Grad	180	180	180	180	180	180	180	10	5	5	5	10
Abstand in Millimeter von der Endruhelage (bei 1 m Skalenabstand) nach Minuten 1	15	35	16	40	0	0	0	38	27	1	0	0
10	9	21	9	20	0	0	0	24	14	0	0	0
200	6	14	4	16	0	0	0	14	6	0	0	0
1400	0	2	0	0	0	0	0	3	1	0	0	0
2200	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Endruhelage gegen Anfangslage verschoben um Millimeter	0	0	0	0	0	0	0	83	27	82	65	169

Bei gezogenem Zink kehrt der Draht nicht wieder in seine erste Ruhelage zurück, sondern nimmt nach etwa 36 Stunden eine neue von der Dauer und Größe der Torsion abhängige konstante, beträchtlich verschobene Ruhelage ein, d. h. ist bleibend teilweise deformiert, zeigt aber eine beträchtliche Nachwirkung beim Erreichen dieser neuen Ruhelage. Dünnere Zinkdrähte (0,3 mm) zeigen diese bleibende Deformation nur in ganz kleinem Maße. Zum Vergleich mit den dickeren Einkristalldrähten mußten aber dicke Drähte aus gezogenem Zink herangezogen werden. Bei Einkristalldrähten wird der Draht auch deformiert, nimmt aber seine neue Ruhelage sofort nach Aufhören der Tordierung ohne Nachwirkung ein. Dies sofortige Zurückschnellen auf eine konstante neue Lage wirkt bei den dicken Drähten überraschend. Die bleibende Deformation bei Einkristalldrähten ist verhältnismäßig größer als bei gezogenen Drähten,

was auch ganz plausibel ist, da die Einkristalldrähte wie Säulen aufeinander geschichteter Kartenblätter bei Torsionen besonders leicht Verschiebung in den Gleitflächen senkrecht zur Kristallachse erleiden, während bei gezogenen Drähten nur ein Teil der Kristallite passend liegt. Es fehlen bei ihnen aber die anders gerichteten Kristallite, welche die verschobenen wieder bei der Entlastung zurückschieben.

§ 8. Wie die Überschrift dieser Arbeit anzeigt, gilt diese Theorie der Nachwirkung nur für Metalle und setzt Körper voraus, die aus kleinen verschieden gerichteten Teilen bestehen, die sich in sich oder gegeneinander verschieben können. Es ist daher möglich, daß sie auch organische inhomogene Körper, wie Seide usw. einbegreift, nicht aber Gläser, welche bekanntlich eine etwa eben so große Nachwirkung wie Metalle haben. Bis vor kurzem hätte man noch umgekehrt aus der Nachwirkung der Gläser schließen können, daß sie inhomogen konstituiert sind, etwa durch fadenförmige Anordnung der Moleküle. Durch die neueren Untersuchungen von Debye und seiner Mitarbeiter an Röntgenspektren ist aber anscheinend nachgewiesen, daß in Gläsern keine größeren Gruppen geordnet aneinanderhängender Moleküle vorhanden sind. Die Frage der Ursache der Nachwirkung bei Gläsern muß daher offen bleiben.

§ 9. Gleichfalls nicht erklärt ist durch diese Theorie die elastische Hysteresis, d. h. die nicht allmählich zurückgehende dauernde kleine Deformation bei Beanspruchungen unterhalb der Elastizitätsgrenze, deren Entstehen und Dauer von der Dauer der Deformation unabhängig ist[1]). Sie hängt nicht von der Zeit ab, kann also nicht von Reibungskräften herrühren wie die Nachwirkung. Nach einer persönlich von Herrn Warburg gemachten Bemerkung läßt sie sich vielleicht ähnlich wie die magnetische Hysteresis erklären, welche davon herrührt, daß für die Molekularmagnete verschiedene Gleichgewichtslagen stabil sind. Ebenso können bei elastischen Beanspruchungen die Kristallite in verschiedenen Lagen im stabilen Gleichgewicht sein und bei Verschiebungen von einer in die andere überspringen.

---

[1]) Vgl. Warburg und Heuse, Verh. d. D. Phys. Ges. **17**, 206, 1915.

Zusammenfassung.

Es wird für die elastische Nachwirkung bei Metallen eine Theorie aufgestellt, die dahin geht, daß bei Deformationen auch unterhalb der Elastizitätsgrenze ein Teil der Kristallite überbeansprucht wird und in sich längs der Gleitflächen oder gegeneinander verschoben wird, und daß beim Aufhören der deformierenden Kraft die elastischen Kräfte der unverschobenen Kristallite die verschobenen allmählich wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückbringen. Die Theorie wird an den vorliegenden Erfahrungen über Nachwirkung bestätigt und experimentell die Folgerung bewiesen, daß einheitliche Metallkristalle (Einkristalldrähte) von Wolfram und Zink keine Nachwirkung zeigen.

Zum Schluß möchte ich noch den Herrn Geh. Nernst und Rubens meinen besten Dank aussprechen für die Erlaubnis der Benutzung ihrer Institute für diese Arbeit.

Verhandlungen
der
Deutschen Physikalischen Gesellschaft

Im Auftrage der Gesellschaft herausgegeben
von
Karl Scheel

20. Jahrg. **30. Oktober 1918.** **Nr. 17/20.**

Über elektrische Strahlungs- und Leuchterscheinungen an Entladungs-Anoden;

von E. Goldstein.

(Erste Mitteilung.)

(Eingegangen am 5. August 1918.)

Einleitung.

Allbekannt ist, daß an der Kathode von Vakuumentladungen (des Induktoriums, der Influenzmaschine oder einer Hochspannungsbatterie) ein sehr großer Reichtum von Strahlungs- und Leuchterscheinungen zu beobachten ist. Demgegenüber ist die Annahme weit verbreitet, daß die Anode in den üblichen Gasmedien durch keinerlei hervorstechende Leuchtcharaktere ausgezeichnet sei und in dieser Hinsicht kein Interesse biete. Es gelingt jedoch, wie in der nachfolgenden Mitteilung und ihrer Fortsetzung gezeigt wird, durch geeignete Versuchsbedingungen um die Anode eine so große Anzahl charakteristischer Strahlungs- und Leuchterscheinungen hervorzurufen, daß dadurch die Fülle der bisher beschriebenen Erscheinungen an der Kathode bei weitem übertroffen wird.



Schon 1876 hatte ich die auffallende Erscheinung erwähnt[1]), daß im Magnetfelde eine äquatorial gerichtete Drahtanode bei geringen Gasdichten von einer äquatorial gelagerten ovalen Fläche umgeben ist, in welcher schraubenartig gewundene Lichtkurven einen elliptischen Dunkelraum umschließen. Nachdem Dezennien vergangen waren, ohne daß mein Hinweis — abgesehen von einer Erwähnung im WIEDEMANNschen Handbuch — irgendwelche Beachtung gefunden, nahm ich das Studium der Erscheinungen wieder auf und wurde durch sie auf die oben erwähnte Untersuchung und ihre Ergebnisse geführt[2]).

Im nachfolgenden wird eine Anzahl von Erscheinungen des untersuchten Gebiets beschrieben, wobei ich aus der Fülle der Phänomene[3]) vorläufig einige Bilder herausgreife, die für einfache Anordnungen das Typische in Umrissen darstellen sollen. Die Erscheinungen sind qualitativ gleich für das Induktorium wie für die Influenzmaschine. Teils wegen der Potentialkonstanz, teils aus technischen Gründen wurden die meisten Versuche mit der Influenzmaschine durchgeführt. Benutzt wurde die Starkstrom-Influenzmaschine von WEHRSEN (größte Ausführung Modell B, Friedenspreis 800 ℳ).

§ 1.

Der Anodenteil einer Entladungsröhre sei ein vertikal gestellter Zylinder von 3 bis 4 cm Weite. Die Anode selbst sei

---

[1]) E. GOLDSTEIN, Monatsber. d. Berl. Akad. 1876, S. 279.

[2]) 33 Jahre nach mir (1909) hat auch HR. GOUY die Existenz der äquatorial gelagerten Lichtfläche und die an ihr von mir schon 1876 erwähnten Erscheinungen nochmals beschrieben (C. R. 148 und 149). GOUY hat außerdem neue Erscheinungen bemerkt, die hauptsächlich auftraten, als er der einen Lichtkurve („Couronne“) Hindernisse („Obstacles“) in den Weg stellte. Auf die dadurch bewirkte Vergrößerung dieser Kurve („Couronne agrandie“) und die zugleich auftretenden Nebeneffekte komme ich in meiner zweiten Mitteilung an geeigneter Stelle zurück.

[3]) Der Reichtum an Erscheinungen mag durch eine einfache Notiz charakterisiert werden. Für die vorliegende Mitteilung (und ihre Fortsetzung) sind bisher rund 700 Entladungsröhren benutzt worden. Unter dieser ganzen Anzahl fanden sich aber nur drei oder vier Stück, die nicht wieder neue, an allen vorhergehenden Röhren noch nicht beobachtete Erscheinungen zeigten. (Veröffentlicht werden natürlich nur Erscheinungen, die an einer größeren Anzahl von Apparaten gleichartig zu beobachten waren.) — Beachtenswert ist auch die starke Empfindlichkeit der Einzelerscheinungen gegen kleine Änderungen scheinbar geringfügiger Bedingungen, eine Empfindlichkeit, die ebenfalls weit über die bekannte Variabilität der Kathodenstrahlphänomene hinausgeht.

ein in die Zylinderachse fallender Aluminium- oder Nickeldraht von 1 bis 2 mm Dicke und etwa 2 cm Länge, der in der üblichen Weise mittels eines glasumhüllten Platindrahts im Röhrenboden befestigt ist und seine Spitze nach oben kehrt. Der Zylinder hänge vertikal zwischen den rechts und links gedachten Polen eines Elektromagneten. Die positive Lichtsäule der Entladung wird dann im Magnetfeld, wie bekannt, an die vordere oder hintere Gefäßwand in einen schmalen Strang kondensiert. Die elektrodynamischen Gesetze lassen im Einzelfalle voraussehen, ob der Strang nach vorn oder nach hinten getrieben wird.

Gelangt man aber zu einer gewissen Gasverdünnung, so tritt das Licht zwar im größten Teil seines Verlaufs an die erwartete Seite, nahe und entlang der Anode selbst aber erscheint ein Teil des Lichts auch an der Gegenseite.

Man kann das auch schon mittels eines Hufeisen-Handmagneten konstatieren [Fig. 1 [1])]. Bei diesen Verdünnungen (die ungefähr übereinstimmen mit den Gasdichten, in denen der Nickeldraht als Kathode in einem 4 bis 5 cm weiten Zylinder mittelstarkes Phosphoreszenzlicht der Gefäßwand erregt), — beginnt das Gebiet der hier zu schildernden Erscheinungen, die ein kräftigerer (Elektro-)Magnet an der Anode hervorruft. Immerhin liegen alle erforderlichen Feldstärken unterhalb 2000 Gauß, größtenteils sogar erheblich darunter, und manche von den hier zu schildernden Erscheinungen wird man in geeigneten Gasdichten rudimentär schon durch größere Handmagnete hervorrufen können.

Wir bezeichnen nun diejenige Seite, nach welcher der positive Lichtstrang gemäß den bekannten Gesetzen getrieben wird, als die Normalseite, die gegenüberliegende als die Anomalseite.

Befindet sich die Anode zunächst in einem feldfreien Raume, so ist sie in geringen Gasdichten von einem schmalen nebligen Zylinder, dessen Dicke jederseits etwa 2 bis 3 mm beträgt, oder von einem ein wenig breiteren, langgestreckten nebligen Ellipsoid umgeben. Wird jetzt der Magnet erregt, so tritt an Stelle der ringsum gleichmäßigen Lichthülle eine äquatorial gestellte ovale

---

[1]) Bei der in Fig. 1 dargestellten Anordnung war der Hufeisenmagnet M etwa 1 Pfund schwer. GG ist der Strang des nach rechts gedrängten gewöhnlichen positiven Glimmlichts, A das an der Gegenseite auftretende außergewöhnliche Licht.

Lichtscheibe, deren geringe Dicke (am Draht jederseits etwa 1 mm) nach außen hin allmählich etwas zunimmt. Die Lichtscheibe erweitert sich bei abnehmender Gasdichte nach der Normal- wie nach der Anomalseite, und man erkennt dann bei axialer Blickrichtung besonders in der Außenzone um den Draht gelagerte helle, konfokalen Ellipsen ähnliche Lichtkurven [Fig. 2[1])] von variabler Zahl (unter den beschriebenen Verhältnissen meist 2 bis 4), bei denen namentlich die kleine Achse mit der Gasdichte relativ stark variieren kann. Die einzelnen Ellipsen zeigen in der Äquatorialebene eine Breite von $1^1/_2$ bis zu einigen Millimetern. Bei äquatorial gerichteter Gesichtslinie erkennt man, daß diese Ellipsen die Projektion elliptischer Ringflächen (niedrige elliptische Zylinder) sind, deren gemeinsame Achse in die magnetische Achse fällt (bzw. ihr parallel ist). Die innersten Ringe sind in axialer Richtung nur ganz wenige Millimeter breit, für die entfernteren nimmt die Breite langsam zu, so daß z. B. für mittlere Dichte bei äquatorialer Gesichtslinie die Gesamterscheinung um die Anode das Bild der Fig. 3 zeigt. Die beschriebenen Lichtringe sind in äquatorialer Richtung etwas schmaler an der Normalseite und liegen dort dichter aneinander als an der Anomalseite; auch ist ihre kleine Achse an der Normalseite etwas kürzer; sie erscheinen also dort etwas flacher als an der Anomalseite.

In engen Zylindern flachen die Ellipsen sich entlang der großen Achse überhaupt mehr ab, in weiten Kugeln nähern die äußeren sich der Kreisform.

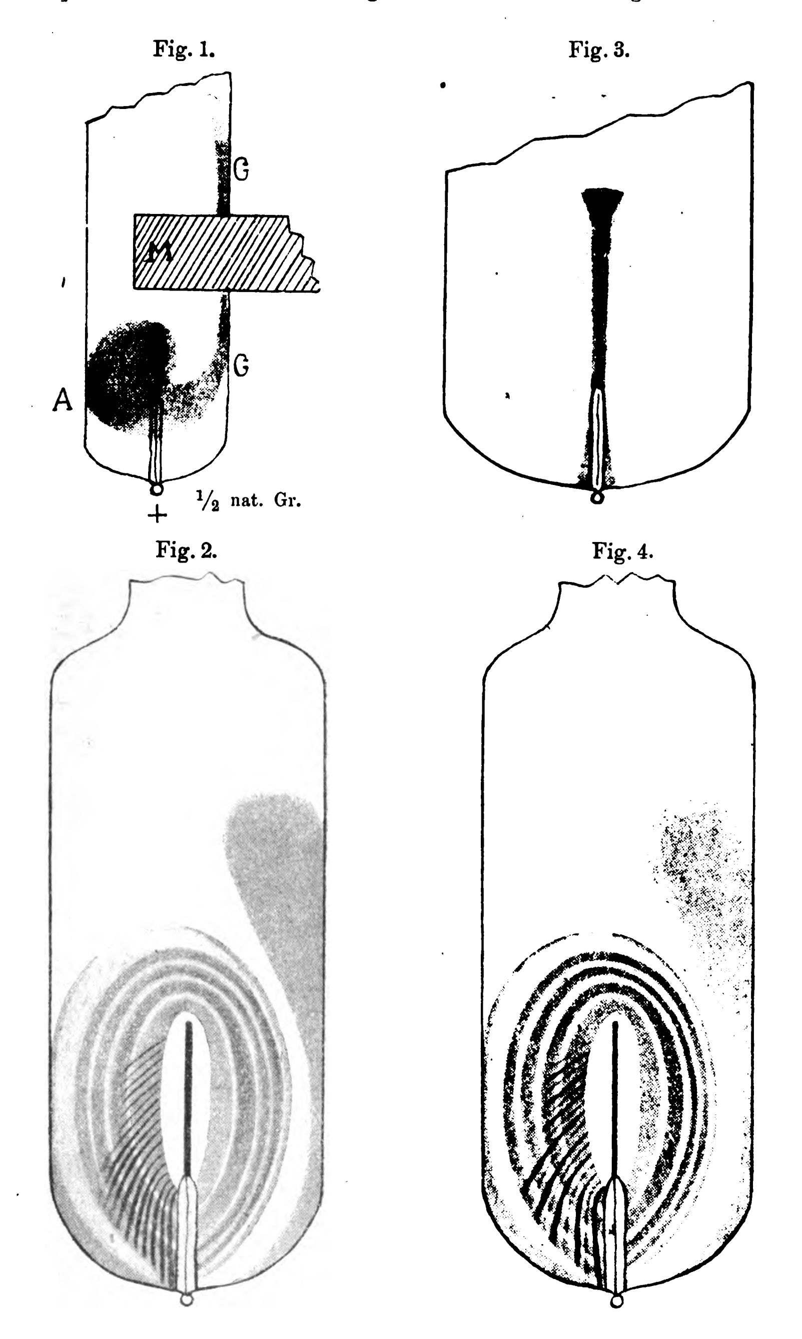
Die Farbe der Ellipsen ist z. B. in Wasserstoff rosa, in Luft (Stickstoff) blau.

Diese, wie auch die weiterhin zu beschreibenden Lichtgebilde um die Anode sind meist noch etwas schärfer gezeichnet, wenn man einen Teil der Glaswand um die Anode selbst oder auch etwas oberhalb des Anodenteils ableitend umfaßt (bzw. mit einer zur Erde abgeleiteten Stanniolhülle umgibt). Die Achsen der Ellipsen sind dann auch etwas verkleinert. Durch die Ableitung ladet die innere Glaswand sich negativ.

---

[1]) Alle nicht bloß schematischen Figuren, bei denen kein Maßstab angegeben ist, sind Darstellungen in natürlicher Größe. — Die in Fig. 2 links auftretenden, die Ellipsen kreuzenden, zahlreichen schmalen Lichtlinien werden S. 128 ff. beschrieben.




Fig. 1.
G
M
G
A
+
1/2 nat. Gr.
Fig. 3.
Fig. 2.
Fig. 4.

Der von den Lichtellipsen umschlossene Raum zeigt eine reiche Differenzierung. Der auffallendste Teil der inneren Lichterscheinung ist (für einen in Richtung der Ringachse blickenden Beobachter) ein an der Anomalseite des Drahtes liegendes Gebilde, das aus zahlreichen leuchtenden, dünnen, zungenförmigen Lamellen besteht, welche gegen die Anode schräg nach unten (also zu ihrem Fuß hin) geneigt sind, desto schräger, je tiefer unten sie verlaufen (vgl. Fig. 2 links). Die untersten drei reichen über das untere Ende des freien Drahtstücks hinaus, liegen fast parallel dem Glasstiel, sind also nahe gerade und vertikal gerichtet. Die schrägen Lamellen erscheinen zugleich etwas bogenförmig gekrümmt, mit nach unten gekehrter Konkavität. Die Krümmung der am höchsten gelegenen Lamellen ist geringer als die der tieferen, bisweilen unmerklich. Das schmalere und dünnere Ende dieser Lichtzungen ist der Anode zugekehrt. Wenn sie gut ausgebildet sind, beträgt ihre Länge etwa $1^1/_2$ bis 2 cm, unter Umständen auch noch mehr. Gestalt und Dimensionen lassen sich etwa mit den Zungenblüten gewisser Kompositen, z. B. des Löwenzahns, vergleichen. Die Breite wächst also an dem von der Anode abgekehrten Ende nur auf wenige Millimeter.

Bei zunehmender Feldstärke rücken die einzelnen Lamellen von oben mehr nach dem Stiel der Anode hin, werden dünner und zahlreicher und drängen sich dichter zusammen [1]). In einem kräftigen Felde sind sie kaum papierdick, und ihre gegenseitigen Abstände betragen dann nur Bruchteile eines Millimeters. In sehr starken Feldern sind sie so eng gedrängt und so dünn, daß man sie mit bloßem Auge nicht mehr sicher zählen kann. In relativ schwachen Feldern, bei größeren gegenseitigen Abständen, zeigen die Lamellen Dicken von 1 mm und mehr, wobei die Dicke wieder von der Anode nach außen zunimmt.

Im allgemeinen treten die Lamellen nicht ganz unmittelbar an die Anodenoberfläche heran. Unter den hier vorausgesetzten Versuchsbedingungen ist die Anode von einem völlig dunkeln Raum umgeben, dessen Umriß im allgemeinen einer langgestreckten Ellipse ähnelt, deren große Achse die jeweilige Anodenlänge etwas übertrifft, während die kleine Achse 0,1 bis 0,5 cm betragen

[1]) Gouy, der einige Lamellen wahrnahm und sie (wie ich selbst l. c. 1876) als Teile einer Schraubenkurve auffaßte, bemerkt: „Le pas de la spire varie en raison inverse du champ." (C. R. **148**, 457, 1909.)

kann. An der Normalseite ist die Dunkelellipse etwas schmaler als an der Anomalseite. Die Farbe der Lamellen erscheint in Wasserstoff rosa, in schwachen Feldern bläulich. (Vielleicht ist auch das Rosa bei stärkeren Feldern bedingt von der Durchdringung bläulicher Lamellen mit rosa leuchtenden Ellipsen.) In Luft und Stickstoff sind die Lamellen bläulich, etwa von der Farbe der Kathodenstrahlen in diesen Medien. In Sauerstoff erscheinen sie gelblich.

Die schon oben betonte große Empfindlichkeit der Erscheinungen gegen die Versuchsbedingungen (z. B. bei minimalen Abweichungen von der Symmetrie im Bau der Röhre) veranlaßt es, daß man nur in äußerst seltenen Fällen eine Röhre erlangt, in der die Lichterscheinungen auch nur bei einer Drehung der Röhre um ihre eigene Achse ganz ungeändert bleiben. Für die Lamellen pflegt es dann bei einer solchen Drehung eine ausgezeichnete Röhrenstellung zu geben, in der ihre Zahl und ihre Dichte für die vorhandene Feldstärke am größten erscheinen („Optimalstellung“). Die Lamellen erscheinen bei dieser Optimalstellung der Röhre untereinander gleichartig, und je zwei einander unmittelbar benachbarte Lamellen unterscheiden sich dann kaum merklich in ihrer Helligkeit. Fig. 2 bezieht sich auf eine solche Optimalstellung. Dreht man nun eine Röhre aus der Optimalstellung auch nur ganz wenig um ihre Achse, so wird — vom Stiel ab gezählt — die 1., 3., 5., ... oder die 2., 4., 6., ... Lamelle blasser, und bei 8 bis 9° Drehung sind die Helligkeitsunterschiede schon sehr groß (Fig. 4). Bei weiterer Drehung wird die eine Serie schließlich unsichtbar, während die andere noch etwas heller als bei der Optimalstellung erscheint. Die Anzahl der Lamellen erscheint dann also auf die Hälfte reduziert, ihr gegenseitiger Abstand verdoppelt. Ist nun die eine (gerad- oder ungeradzahlige) Serie für den Beobachter (bei ungefähr axialer Gesichtslinie) lichtschwach oder unsichtbar geworden, so genügt es, der Gesichtslinie eine etwas andere Richtung (schräg nach unten oder oben) zu geben, um die verschwundene Reihe wieder hell erscheinen zu lassen und dafür die andere Reihe verschwinden zu lassen.

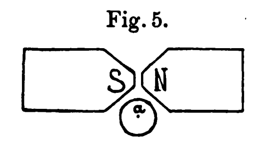
In der Optimalstellung ist ein Wechsel der Blickrichtung ohne Einfluß; Helligkeit und Zahl der Lamellen bleiben dann ungeändert.

Es sind also im allgemeinen zwei Scharen von Lamellen vorhanden, deren Nachbarglieder außer bei der Optimalstellung

gegeneinander geneigt sind. Je nachdem man nun auf die scharfe Kante der einen oder der anderen Schar blickt, so gewinnt (durch Helligkeitssummierung längs der Gesichtslinie) die erste oder die zweite Schar für den Beobachter ein Maximum der Helligkeit. Die verschiedene Orientierung der zwei Lamellenscharen wird besonders anschaulich, wenn man an Stelle des vertikalen einen horizontalen Draht verwendet, der zunächst in die Äquatorialebene fällt, bei einer Drehung des Rohrs um die Vertikalachse aber einen kleinen Winkel mit jener Ebene bildet. Ein vom Stiel her dem Drahte entlang visierender Beobachter, der dann auf die Schmalseiten der Lamellen blickt, sieht deutlich die eine Schar etwas nach rechts, die andere etwas nach links gegen die Vertikale geneigt. —

Bei vertikaler, von der Axiallinie etwas seitlich gelegener Stellung des Entladungsrohrs — wie Fig. 5 schematisch andeutet — ist das Bild der Lamellen bei konstanter Lage der Anode verschieden, je nach der Polarität des Magneten, d. h. je nachdem die Lamellen von der Anode aus in das Feld oder aus ihm heraus gerichtet sind.

Fig. 5.



Sie sind im ersteren Falle enger und zahlreicher, und neigen sich dann auch stärker zur Anode hin. Das bedeutet, daß für die Lamellen nicht bloß die Verhältnisse maßgebend sind, die der Magnet an der Anode selbst erzeugt, sondern daß er die Lamellen auch noch während ihrer Ausbreitung beeinflußt und ablenkt. — Vergrößert man die Drehung des Rohrs mit horizontalem Anodendraht weiter, so gelangt der Draht aus äquatorialer Stellung schließlich in die axiale Lage zu den Magnetpolen. Während der Drehung vermindert sich die Zahl und die Lage der Lamellen. In der axialen Drahtstellung sind sie überhaupt nicht mehr erkennbar, ebensowenig die elliptischen Lichtringe, und die Lichterscheinung ist gegenüber der äquatorialen Lage total geändert. Die Anode ist (Fig. 6) in ihrer ganzen Länge von einem ihr unmittelbar anliegenden, in starken Feldern ringsum etwa 1 mm dicken, hellen Lichtsaum umgeben (bläulich in H, N und O, aber mit verschiedenen Nüancen und Spektren). Auf ihn folgt ein nur sehr matt erhellter Raum von $1\frac{1}{2}$ bis 2 mm Breite, dann eine lichtstarke zylindrische Hülle von etwa $2\frac{1}{2}$ bis 3 mm Dicke, die an den beiden Enden sich etwas kontrahiert. —

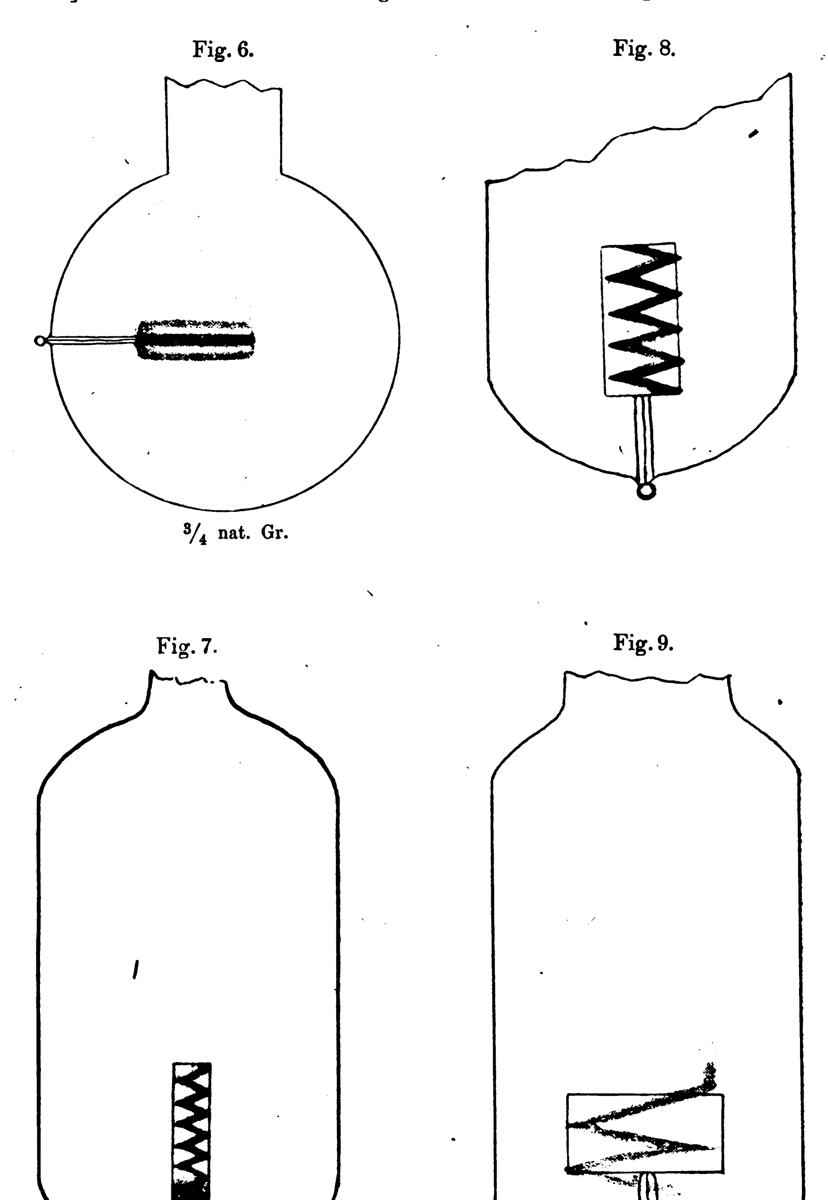


Fig. 6.

$^3/_4$ nat. Gr.

Fig. 8.

Fig. 7.

Fig. 9.

In einem schwächeren Felde verbreitern sich diese Gebilde. Bei axial gerichteter Gesichtslinie erblickt man die zu erwartende Projektion der oben beschriebenen Erscheinung, nämlich um den Draht drei konzentrische Hüllen, deren mittelste am lichtschwächsten erscheint. Wird das Feld um die axiale Anode geschwächt, so sieht man bei axialer Blickrichtung in der dann erweiterten Lichterscheinung, und zwar in der Mittelzone, noch eine bläuliche Lichtspirale. Sie ist die Projektion einer dünnen Spiralfläche, die um die Länge des Drahtes sich in langen Gängen herumschlingt, und die ihren Drehungssinn umkehrt, wenn man den Magneten kommutiert[1]).

§ 2.

Wir kehren zurück zu einer äquatorial gestellten Anode, an der wir bisher hauptsächlich die Anomalseite ins Auge gefaßt hatten.

Aber auch die Erscheinungen an der Normalseite bieten Interesse. Man erkennt manche von diesen Erscheinungen zunächst leichter, wenn man als Anode nicht einen dünnen Draht, also eine sehr stark gekrümmte Zylinderfläche, sondern entweder einen dicken Draht oder eine ebene Platte benutzt. Die Anode sei z. B. ein Rechteck von 20 bis 25 mm Länge und 4 bis 10 mm Breite aus Aluminium- oder Nickelblech. Die Langseite stehe vertikal zwischen den Polen, die Fläche senkrecht zur Äquatorialebene. Dann erscheint an der Normalseite des Blechs eine Zickzackkurve, die der Länge des Rechtecks entlang läuft. Ihre Farbe ist — mit verschiedenen Nüancen — bläulich in H, N und O. Um diese Zickzackkurve in bester Entwickelung zu sehen, ist das Rechteck ganz wenig um die Vertikale aus der obigen Lage herauszudrehen. Fig. 7 und 8 zeigen diese Kurven an zwei Rechtecken von 20 mm Länge und 4 bzw. 8 mm Breite für gleiche Gasdichte[2]). Die Anzahl der Kurvengänge ist cet.

[1]) Die Spiralfläche habe ich 1876 nicht wahrgenommen. Sie ist in kohlehaltigem Gas für die Beobachtung zu lichtschwach. Das Innere der zylindrischen Lichthülle erscheint dann ganz lichtlos, wie ich es damals (l. c.) beschrieben habe. Erst die Anwendung flüssiger Luft läßt die Reste organischer Dämpfe bequem beseitigen.

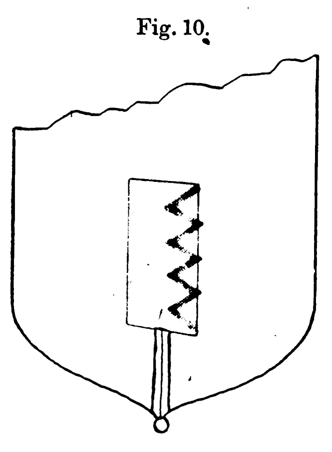
[2]) An breiteren Blechen (Fig. 8) zeigt die Kurve bei der kleinen Drehung des Blechs eine schwach unsymmetrische Lage, indem sie an derjenigen Längsseite, die vom Beobachter fortgedreht ist, ein klein wenig vom Rande zurücktritt, an der Gegenseite aber etwa ebensoviel über den Rand hinausgeht.

par. desto größer, je kleiner die Breite des Rechtecks. In der erwähnten Lage ist die Breite der Kurven merklich gleich der Breite des Rechtecks selbst. — Die Gangzahl nimmt ab mit abnehmender Feldstärke, indem die Gänge dann weiter auseinandertreten (und zugleich dicker und weniger scharf werden). Gleichzeitig bewegen die Gänge sich nach abwärts, zum Fuß der Anode hin.

Wird die Anode in ihrer Ebene um 90° umgelegt, so daß jetzt die Langseite senkrecht zur Stromrichtung liegt, so wächst die Kurvenbreite auf die neue Blechbreite (Fig. 9), und zwar gleichgültig, ob der Stiel an der langen oder an der kurzen Seite des Rechtecks angebracht ist[1]).

Gibt man der Anodenplatte eine stärkere Drehung um die Vertikale, so verkürzen sich die Gänge mehr und mehr, indem sich die Kurve (Fig. 10) von dem zurückweichenden Rande (Beobachter an der Normalseite) immer weiter zurückzieht und schließlich sich auf eine schmale Zone des Blechs in der Nähe des vorwärts gedrehten Randes beschränkt.

Fig. 10.



Bei größerer Länge der Anode oder bei relativ geringer Gasverdünnung ist die Zickzackkurve nicht entlang ihrer ganzen Ausdehnung gleich scharf ausgebildet. Dann sind immer diejenigen Teile am schärfsten entwickelt, die dem freien Ende der Anode am nächsten sind — die Lamellen verhalten sich, wie erwähnt, umgekehrt.

Der Leser darf sich nun nicht vorstellen, daß die „Zickzackkurve" durch eine ebene, der Anodenfläche anliegende Lichtlinie gebildet wird. Schon die unmittelbare Anschauung bei einer Betrachtung von der Seite her (Fig. 11, die Erscheinungen an der Anomalseite sind nicht mitgezeichnet) widerspricht dem. Man sieht dabei, daß das Lichtgebilde sich von der Anodenfläche

---

[1]) Die Beschreibung zahlreicher Versuche, in denen die Anode andere Stellungen und Umrisse hatte, schalte ich vorläufig aus.

beträchtlich emporwölbt, und eine nähere Betrachtung zeigt, daß sich von der Anode dünne blaue Lichtflächen erheben, die sich schräg nach dem freien Ende der Anode neigen, außerdem aber auch schräg von einem Längsrande der Anode zum anderen verlaufen. Es sind zwei Systeme solcher Flächen vorhanden, und ihre perspektivischen Projektionen auf die Anodenfläche ergeben zusammen den Eindruck einer einzigen zusammenhängenden Zickzackkurve. Durch die Anordnung dieser beiden Flächenscharen wird eine an die Lamellenphänomene erinnernde Erscheinung bedingt: Man kann von der Seite her schräg aufwärts oder abwärts blickend, je nach der Blickrichtung, die eine Flächenschar (1., 3., 5., ... Lichtfläche) zum Verschwinden und die gleichartige paarige zu maximaler Helligkeit bringen — oder umgekehrt.

Fig. 11.



Aus der relativen Neigung der Lamellen gegen die Anodenfläche einerseits und der Orientierung der eben beschriebenen Lichtflächen andererseits erklärt sich ohne weiteres, daß die Lamellen zusammen nur als ein einziger gleichförmiger Lichtstreifen erscheinen, wenn man auf sie entlang der Anode vom freien Ende der letzteren hin blickt, und entsprechend die Zickzackkurve der Normalseite, wenn man vom Fußende her visiert.

Bezüglich der Lage von Lamellen- und Zickzackkurven sei noch eine Tatsache erwähnt, die in der zweiten Mitteilung zu einer erklärenden Orientierung in diesem Erscheinungsgebiete mitdienen soll: Wenn man den vertikalen Anodendraht (bzw. das Anodenrechteck) unter sonst gleichen Umständen mit dem freien Ende nicht wie bisher nach oben, sondern nach unten richtet, so vertauschen die Lamellen und die Zickzackkurven ihre Stellen miteinander. Die Lamellen treten dann an derjenigen Seite auf, nach welcher der Magnet das positive Glimmlicht drängt, also an der Normalseite, die Zickzackkurven an der

Anomalseite. Ein analoger Platzwechsel (dann aber zwischen oben und unten) findet statt, wenn man eine äquatorial-horizontal gestellte Anode bei konstanter Feldrichtung mit dem freien Ende einmal nach vorn, das andere Mal nach hinten richtet. Dreht man eine (z. B. zylindrische, aufrechte) Röhre mit einer solchen Anode um ihre Vertikalachse, so treten die Lamellen von der Oberseite der Anode an die Unterfläche, während die Zickzackkurve von der Unterseite nach oben gelangt.

Diese Lagen-Umkehrungsverhältnisse gestatten nicht, für die Lichterscheinungen an beiden Anodenseiten etwa die einfachen Bezeichnungen Normalkurve und Anomalkurve durchgehend zu verwenden — es sei denn, daß man die Spitzenrichtungen der Anode festlegt. Die Lichtflächen, welche die Zickzackkurve bilden, ähneln aber in der Form z. B. den Schuppen der Koniferenzapfen, zugleich bald dichter an die Anode sich anschmiegend, bald (in schwächeren Feldern) von ihr sich mehr abspreizend. So mag an Stelle von „Zickzackkurve" oder „Normalkurve" im allgemeinen die Bezeichnung „Schuppenkurve" gestattet sein.

Verhalten die Lamellen zu den Schuppenkurven sich mehrfach scheinbar gegensätzlich, so ist doch im ganzen der Eindruck nicht abzuweisen, daß eine größere Anzahl der beiderseitigen Eigenschaften sich unter gemeinsamen Gesichtspunkten zusammenfassen ließe, wenn man z. B. annimmt, daß die Schuppen wie die Lamellen Ströme gleichartig — sehr wahrscheinlich negativ — geladener Teilchen sind. Bilden sich aber in der Nähe der Anode Ströme negativer Teilchen, so darf man dort um so mehr auch das Auftreten positiv geladener Teilchen erwarten. Wir werden ihnen sogleich begegnen.

§ 3.

Bei der Beobachtung der beschriebenen Gebilde fiel mir wiederholt ein goldgelbes Leuchten von Teilen der Gefäßwand in der Umgebung der Anode auf. Es war nur bei Erregung des Elektromagneten erkennbar. Das Licht machte ganz den Eindruck wie das goldgelbe Leuchten, welches Kanalstrahlen an der Wandung zu erzeugen pflegen. Es gehörte einem Gase an, da es optisch nicht an die Außenwand versetzt wurde[1]). Die

[1]) Vgl. über dieses Kriterium: E. GOLDSTEIN, Verh. d. D. Phys. Ges. 4, 4, 1902; Ann. d. Phys. (4) 8, 94, 1902.

gelbleuchtenden Teile der Gefäßwand zeigten im Spektroskop die D-Linie, wie die in den Kanalstrahlen leuchtende Wandung. Die Vermutung drängte sich auf, daß das Gelblicht auch bei den vorliegenden Versuchen durch eine wirkliche Strahlung erregt werde, und zahlreiche Versuche bestätigten diese Annahme.

Ich stelle einige Ergebnisse dieser Versuche hier zusammen[1]).

1. Bei geringen Gasdichten entspringen unter der Einwirkung eines Magneten an der ganzen Anodenfläche[2]) Strahlen, welche bei hohen Verdünnungen in starken Feldern kräftiges gelbes Licht an der (natriumhaltigen) Gefäßwand erregen. Feste Körper entwerfen in diesem Gelblicht scharfe schwarze Schatten. In gut gereinigtem Wasserstoff ist das Leuchten der Wandung grün.

2. Bei etwas höheren Gasdichten erregen die Strahlen auch im Gase selbst kräftiges Leuchten, das in Wasserstoff rosa, in Stickstoff oder verdünnter Luft goldgelblich, in Sauerstoff olivgelb erscheint. Feste Körper entwerfen auch in diesen direkt sichtbaren Strahlenbündeln geradlinig begrenzte Schattenräume. Die Strahlenräume werden bei mäßigen Verdünnungen von matterem Lichte erfüllt, das auf einer Diffusion der Strahlen an den Gasteilchen beruht. Die Diffusion erscheint um so geringer, also die Begrenzung der Schattenräume um so schärfer und ihr Inneres um so dunkler, je geringer die Gasdichte wird. — Die Spektra der Strahlen sind bekannte Spektra der betreffenden Gase.

3. Die Strahlen breiten sich von der äquatorial gerichteten Anode her nicht gleichmäßig nach allen Seiten aus, sondern zeigen die stärkste Intensität in der Äquatorialebene selbst und in kleinen Winkeln zu ihr, sowohl an der Normal- wie an der Anomalseite, so daß sich zunächst der Anschein bietet, als wenn die Strahlung nur in zwei schmale Keile konzentriert sei.

---

[1]) Die Versuche beziehen sich in erster Reihe auf gerade Drähte und ebene Platten. Wo nichts anderes bemerkt, sind die Drähte äquatorial gestellt, die Platten so, daß ihre Normale äquatorial gerichtet ist.

[2]) Der Ausdruck, daß die Strahlen an der Anode entspringen, soll noch nicht unbedingt die Annahme einschließen, daß sie unmittelbar von der Oberfläche der Anode ausgehen, sondern er soll zunächst den Beobachtungen gerecht werden, daß die Strahlen jedenfalls schon in geringen Entfernungen von der Anode nachgewiesen werden können, daß sie ferner nachweislich sich in der Richtung von der Anode fort ausbreiten, und daß ihre Rückwärtsverlängerung sehr vielfach auf die Anode selbst führt. Die zweite Mitteilung kommt hierauf näher zurück.

Bei geringen Gasdichten zeigt aber die Gefäßwand sehr schwaches gelbes Leuchten in allen Azimuten um die Anode, und bei Einschaltung breiter Schattenobjekte erkennt man, daß dieses schwache Leuchten nicht einfach durch diffuses Licht erregt wird; denn es treten in ihm ausgedehnte, gut begrenzte schwarze Schattenflächen auf, die eine erhebliche Apertur einer regelmäßigen Strahlung von der Anode her beweisen. Zu demselben Ergebnis führen Daueraufnahmen der Strahlen im Gase, die ebenfalls die Erfüllung des Raumes rings um die Anode mit schwachen Strahlen bezeugen. Der Winkel, welcher die hellsten Strahlen einschließt, wird an beiden Seiten um so kleiner, die Konzentration der Strahlungsenergie in zwei schmale Keile also um so stärker, je stärker das magnetische Feld wird. —

4. Die Strahlen wurden hell in weiten Grenzen von Länge und Dicke, bzw. Flächengröße der Anode beobachtet. Drähte wurden von 1 mm bis 10 cm Länge benutzt, an plattenförmigen Anoden traten die Strahlen noch bei mehr als 100 qcm Fläche auf. Die Dicke der benutzten Drähte variierte von $^1/_{10}$ mm bis zu 8 mm.

5. Die nach den beiden Hauptseiten (Normal- und Anomalseite) emittierten Strahlungen sind untereinander nicht gleich hell, und es überwiegt die Intensität an der Normalseite. An einer Gefäßkugel z. B. mit diametral und vertikal gerichteter Drahtanode verläuft deshalb bei geringen Gasdichten in der Äquatorialebene rings um die Kugel ein schmales goldgelbes (oder grünes) Band als Durchschnitt der Wandung mit den hellsten Keilstrahlen, das aber an der Normalseite heller ist als gegenüber.

6. Bei geeigneten Gasdichten und Feldstärken dehnen die Strahlen sich zu erheblichen Längen aus. Ich habe in entsprechend gestalteten Gefäßen (vgl. § 6: Demonstrationsversuche) Bündel von über 1 m Länge herstellen können, ohne daß dabei eine Grenze ihrer Ausdehnung erreicht schien. — Deutliche kürzere Strahlen lassen sich auch schon mittels Handmagneten (z. B. Hufeisen von 1 kg) hervorrufen.

7. Die Strahlen verlaufen im allgemeinen nicht genau senkrecht zur Anode bzw. den emittierenden Flächenelementen. Fig. 12 zeigt mit Hilfe einer durchlochten Glimmerplatte D, wie die Strahlrichtungen an einem geraden Draht (ganz ähnlich an einem gleichlangen Rechteck von einigen Millimeter Breite) sich gestalten. Die Figur bezieht sich auf den Fall, daß der Nordpol

sich oberhalb der Papierebene befindet und die Lochzentra in die Äquatorialebene fallen. Die hindurchtretenden Strahlen gehen also nach der Anomalseite. Man beobachtet dann:

α) Die Bündel divergieren im allgemeinen gegeneinander wie gegen die Normale der Anode.

β) Die Schrägrichtung ist um so stärker, je näher die Emissionsstellen den Enden der Anode liegen. Naturgemäß sind hiernach auch die Strahlen der einzelnen Bündel gegeneinander etwas divergent.

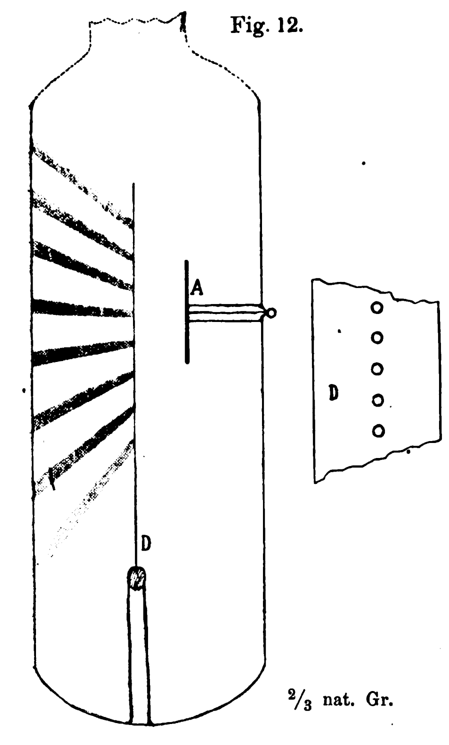


Fig. 12.

$^2/_3$ nat. Gr.

γ) Die Richtung der Bündel ist cet. par. merklich verschieden bei den nach der Normalseite gehenden Strahlen. Die oberen und mittleren Bündel weichen von der Normale der Anode dann nur wenig ab, stark nach unten aber divergieren von ihr die untersten Bündel.

δ) Die Bündel erzeugen für beide Feldrichtungen Leuchtflecke, wo sie die Gefäßwand treffen. Die Flecke sind von kräftigem Gelb in Sauerstoff, in Wasserstoff überwiegt Grünlicht. Das Spektrum des letzteren ist kontinuierlich, die Gelbflecke geben die D-Linie.

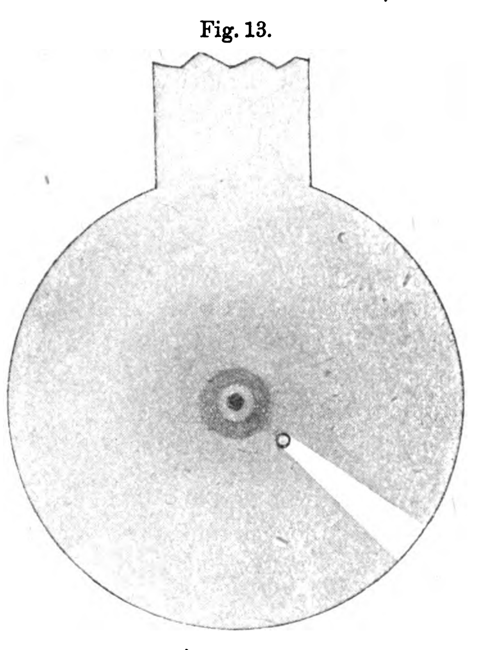
ε) Die Helligkeit der Leuchtflecke (gelb wie grün) nimmt, wie überhaupt die Helligkeit des von den Strahlen an festen Körpern erzeugten Leuchtens mit der Zeit ab. Intensiv ist besonders das Gelblicht an kurz vorher geschmolzen gewesenen Glasteilen. Eine erneute mäßige Verstärkung kann für einige Zeit mehrmals wieder durch Erhitzung von außen (Bunsenflamme) erzielt werden.

ζ) Markiert man die Lage der zu den einzelnen Bündeln bzw. Löchern gehörigen Leuchtflecke z. B. für den Fall, wo die

Beobachtungswand die Anomalseite bildet, so sieht man nach Umpolen des Magnets, daß alle Flecke dann tiefer liegen (bei den vorliegenden Röhrendimensionen um mehrere Millimeter).

8. Die Abweichung der Strahlenbündel von der Anodennormale wächst mit zunehmender Stärke des Magnetfeldes. Betrachten wir als magnetische Ablenkung den Winkel, um welchen ein Strahlenbündel von der Normale der Anode abweicht, wenn die Anode eine in einer Kugelröhre zentral angebrachte Kreisscheibe ist, und wenn das betrachtete Bündel von der Mitte dieser Scheibe ausgeht, so erfolgt die Ablenkung der Strahlen im entgegengesetzten Sinne wie die von gleichgerichteten Kathodenstrahlen. Der Sinn der Ablenkung (die Verhältnisse werden weiter unten noch näher untersucht) spricht also für positive Strahlen. Für gleiche Feldstärken und gleiche Gasdichten ist die Ablenkung der betrachteten Strahlen außerordentlich viel geringer als die von Kathodenstrahlen. Dieser Umstand und die große Steifigkeit der Strahlen lassen in ihnen Strahlen positiver Ionen sehen. —

Fig. 13.



9. Wenn ein gerader Anodendraht axial zwischen den Magnetpolen liegt, so sendet er geradlinige positive Strahlen gleichmäßig nach allen Seiten aus. Die Strahlen erregen bei geringen Gasdichten ringsum an der Wandung Gelblicht (bzw. Grünlicht) mit scharfen Schatten, und bei weniger starker Verdünnung erkennt man den geradlinigen Verlauf der Strahlen an den entsprechenden Schattenräumen im Gase selbst. Bei der Röhre Fig. 13 ist als Schattenobjekt ein zum Anodendraht paralleler Glasstab eingeschaltet.

Die beschriebenen Erscheinungen treten in ganz reinen Gasen auf, z. B. auch in Wasserstoff, der durch Kühlung der Zuleitungsröhren mittels flüssiger Luft und Eintauchen der Versuchsröhre selbst in flüssige Luft nach Möglichkeit von Beimengungen befreit ist. Je reiner der Wasserstoff, desto markanter erscheinen die betreffenden Phänomene. — Strahlen positiver Ionen liegen für reine Gase bereits in den Kanalstrahlen, den K_1- und S_1-Strahlen vor, die sämtlich mit Zuständen und Vorgängen an der Kathode eng verknüpft sind. An der Anode erzeugten GEHRCKE und REICHENHEIM[1]) positive Strahlen in Metallsalzdämpfen und nannten sie „Anodenstrahlen". Dieselben Autoren beobachteten Anodenstrahlen auch in gewöhnlichen Gasen, wenn denselben Halogene (besonders Jod) beigemengt waren. Für reine Gase ist, soviel ich sehe, hier zuerst und zwar zunächst mit Hilfe des Magneten, die Erzeugung positiver Ionenstrahlen an der Anode nachgewiesen[2]).

Die schon jetzt deutliche und weiter unten noch mehr hervortretende Ähnlichkeit in den Eigenschaften der vorliegend beschriebenen positiven Strahlen mit den Kanalstrahlen mag es rechtfertigen, sie als Magnetkanalstrahlen (abgekürzt *MK*-Strahlen) zu bezeichnen.

§ 4.

Während an der Kathode in den Druckbereichen, in denen man mit Kathodenstrahlen zu experimentieren pflegt, das Potential bekanntermaßen, namentlich bei geringen Dichten, zu hohen Werten ansteigt, hat man in den üblichen Versuchsgasen an der Anode meist nur sehr geringe Spannungen beobachtet. Etwas höhere Werte wurden nach Beimengung von Halogenen oder auch in reinen Halogenen erzielt und dann u. a. auf die Verkleinerung der rein metallischen Oberfläche infolge chemischen Angriffs bezogen. In meinen Versuchen mit Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff — unter Entfernung von Beimengungen durch

[1]) E. GEHRCKE und O. REICHENHEIM, Verh. d. D. Phys. Ges. **9**, 76, 200, 1907; **10**, 217, 1908.

[2]) O. REICHENHEIM (Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 658, 1913) glaubte, zwar nicht bei ausgedehnteren Oberflächen, aber schließlich doch von dem Querschnitt eines in ein Kapillarrohr eingesenkten 0,3 mm dicken Platindrahts auch in reinen Gasen Anodenstrahlen erhalten zu haben. Eigene Wiederholungen des Versuchs zeigten mir, daß es sich dabei um positive Striktionsstrahlen handelt.

flüssige Luft — ergab sich ein Ansteigen des Anodenpotentials zu sehr hohen Werten, wenn die Gasdichte sehr gering wurde. Am BRAUNschen Elektrometer zeigten sich dann Spannungen von über 10000 Volt. Bei solchen Spannungen kehrte sich vielfach das Temperaturverhältnis zur Kathode um, die ja in GEISSLERschen Röhren oft heiß wird, während die Anode kühl bleibt. Dünne Platindrähte, z. B. von $^1/_{10}$ mm Dicke (2 cm lang) zeigten als Anoden in geringen Dichten helle Rotglut, während sie bei Stromumkehr dunkel bleiben.

Bei beliebigen Dimensionen der Anode aber steigt in geringen Gasdichten das Gefälle an ihr sehr erheblich im Magnetfelde. Mäßige Anstiege im Felde haben schon WILLOWS und RIGHI beobachtet[1]). Ich konnte bei Anoden von 2 cm Länge und 1 mm Dicke, wie ich sie meist benutzte, schon in Feldern unterhalb 2000 Gauß Gefälle von über 40000 Volt beobachten. Dabei zeigten sich unter Verwendung von Aluminium, Nickel und Kupfer bei gleicher Dimension prozentual nur relativ mäßige Spannungsunterschiede für die drei Metalle. Ausgeprägter war für Anoden aus demselben Metall, die in der Achse eines zylindrischen Gefäßrohrs lagen, der Einfluß der Rohrweite, wobei die Spannung im engeren Rohr die größere war.

Dem Anwachsen des Anodengefälles im Magnetfelde entsprechen sehr beträchtliche Steigerungen der Temperatur. Ein Platindraht von $^1/_{10}$ mm Dicke, der, wie erwähnt, als Anode schon infolge sehr starker Evakuation glühend werden kann, — war dunkel, wenn diese Evakuation eine mäßige, aber doch schon hinreichend war, um im Felde die Ovalgebilde zeigen zu können. Wurde dann aber der Magnet (zwischen dessen Polen die Anode in einem 3 bis 4 cm weiten Rohr äquatorial liegt) erregt, so wurde der Draht bis nahe an seine Einschmelzstelle rasch hellglühend. Er wurde wieder dunkel, sobald der Magnet ausgeschaltet war, und der Wechsel konnte bei kurzer Dauer der Magnetisierung beliebig oft veranlaßt werden. Läßt man bei einer derartigen Anordnung aber den Magnetstrom für einige Zeit geschlossen, so

[1]) Auch GOUY behauptet einen Anstieg des Anodenpotentials im Magnetfelde, folgert ihn aber einfach daraus, daß er im Magnetfelde eine Spannung von 3000 Volt beobachtete. Er setzt jedoch (vgl. oben) irrtümlich voraus, daß um eine Anode im feldfreien Raume stets eine verschwindend kleine Spannung bestehe und schiebt beweislos die gesamte beobachtete Spannung der Magnetwirkung zu.

beginnt der glühende Draht an seinem freien Ende zu sprühen, und um ihn schwärzt sich die Glaswand. Schließlich wird der Draht bis auf einen minimalen Rest, der durch den Glasstiel gekühlt wird, abgetragen. Ein Nickeldraht von 1 mm Dicke und 2 cm Länge wird unter denselben Umständen gelbrotglühend, ein gleich langer parallelepipedischer Kadmiumstreifen (von 2 mm × 1 mm Querschnitt) wird rasch verdampft und gibt einen dunkeln Spiegel an der Glaswand. — Besonders starke Erhitzungen waren zu beobachten, wenn der (dann etwa 3 cm lange) Anodendraht (aus später anzugebender Veranlassung) noch mit einem Glasröhrchen von 4 bis 6 mm lichter Weite umgeben wurde, aus welchem sein freies Ende einige Millimeter hervorragte. Dann wurde mein stärkster Nickeldraht (1,7 mm dick) intensiv rotgelbglühend und Aluminiumdrähte wurden erweicht. — Bei lichten Weiten des umgebenden Rohrs von 10 mm blieben die Drähte dunkel bzw. hart, — ebenso bei sehr geringen Weiten (2 mm). —

Man könnte geneigt sein, anzunehmen, daß die Entstehung und das Verhalten der Magnetkanalstrahlen (abgesehen von Ablenkungen, die das Magnetfeld veranlaßt) sich restlos schon aus dem hohen Potential an der Anode erklären, welches die Abschleuderung von Ionen und dadurch an sich Strahlenbildung veranlassen müßte. Doch wird sich später (zweite Mitteilung) zeigen, daß die Verhältnisse etwas komplizierter liegen.

§ 5.

Wir setzen wieder eine äquatorial und vertikal gerichtete gerade Drahtanode voraus, deren freies Ende nach oben gekehrt ist, und die z. B. in die Achse eines Zylindergefäßes fällt. Die Lichtscheibe um eine solche Anode behält mit allen Gebilden, die an ihr zu beobachten sind, ihre äquatoriale Lage bei, auch wenn die Röhre sich selbst parallel aus dem Interferrikum herausgebracht wird, wenn nur die Anode selbst noch in die Äquatorialebene fällt, also in jeder Lage von beiden Polen gleich weit absteht. (Im Interferrikum selbst, wo das Feld homogen ist, auch bei ungleichen Abständen von den Polen.)

Verschiebt man aber die Röhre aus einer solchen Lage, immer sich selbst parallel z. B. nach rechts, so fängt die Ovalscheibe mit ihren leuchtenden Gebilden an, sich um die Vertikale zu drehen, und zwar, wenn rechts der Nordpol liegt, von oben

gesehen entgegen dem Uhrzeiger. Die Drehung schreitet bei weiterer gleichsinniger Verschiebung der Röhre fort, bis schließlich an der Mitte des rechten Polschuhs (Fig. 14) die Scheibe sich um 90° gedreht hat. Dabei befinden die Lamellen sich dann an der linken Seite des Drahtes. Umschreitet der Beobachter samt der Röhre den ganzen Polschuh in der Pfeilrichtung, so bleiben die Lamellen für seine Blickrichtung überall an der linken Drahtseite. Die Lichtscheibe selbst liegt, wenn die Röhre an der Mitte von *r* liegt, wieder parallel zur Äquatorialebene, und in der Mitte von *h* wieder senkrecht zu dieser Ebene. Sie führt also bei dem beschriebenen Umgang der Röhre auch selbst eine Drehung von 360° aus. — Läßt man die Röhre unter sonst gleichen Bedingungen um den Südschuh herumgehen, so dreht sich die Lichtscheibe jetzt mit dem Uhrzeiger und die Lamellen liegen für den mit der Röhre wandernden Beobachter auf der rechten Drahtseite.

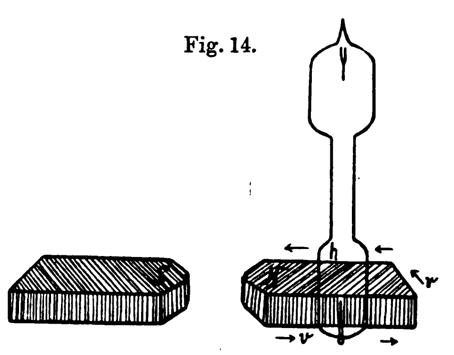


Fig. 14.

Im selben Sinne nun und jeweils um genau die gleichen Beträge drehen sich um die Vertikale auch die beiden Keile der positiven Strahlenmaxima. Sie gehen also von der zur Äquatorialstellung parallel gerichteten Anode nicht immer selbst in äquatorialer Richtung aus, sondern je nach der Lage der Anode im Magnetfelde in beliebigen Azimuten gegen diese Richtung.

(Es bedarf kaum noch der Bemerkung, daß ganz entsprechende Drehungserscheinungen um die Horizontale auftreten, wenn man die Anode bei horizontaler, der Äquatorialrichtung paralleler Lage nach rechts oder links über den Polschuhen bewegt.)

In vertikaler wie in horizontaler Lage der Röhre ist also der Drehungssinn der Scheibengebilde mit den Strahlenkeilen und die Einstellung der Lamellen am südlichen Polschuh den Erscheinungen am Nordschuh entgegengesetzt.

Kommutiert man die Entladungsrichtung in der Röhre, so daß also der Draht jetzt Kathodenstrahlen aussendet, so konzentrieren die letzteren im Magnetfelde sich bekanntlich in die dünnen

PLÜCKERschen Lichtflächen, deren Ebene axial steht, wenn der Kathodendraht zwischen den Polen äquatorial liegt. Läßt man nun die Kathode in der oben beschriebenen Weise um die Polschuhe wandern, so schneidet die PLÜCKERsche Fläche überall die Ovalscheibe und die Mittelrichtung der positiven Strahlenkeile unter 90°. Die Ovalgebilde stellen sich somit überall senkrecht zu den sie durchsetzenden magnetischen Kraftlinien; sie stellen sich ein wie eine Scheibe aus diamagnetischem Material. Und ebenso steht die Mittelrichtung der positiven Keilstrahlen stets senkrecht zu den Kraftlinien.

Weiter oben waren wir zu dem Schluß gelangt, daß die Anode im Magnetfelde nur scheinbar bloß unter kleinen Winkeln strahlt, und daß sie im allgemeinen von positiven Strahlen ringsum umgeben ist. Unter diesen Umständen ergibt sich die Frage: Handelt es sich bei den geschilderten anscheinenden Richtungsänderungen von Strahlenbündeln um wirkliche Ablenkungen der Strahlen, oder variiert nur die Intensität der Strahlen nach verschiedenen Richtungen, während sie dabei — mindestens in erster Annäherung — konstante Richtung behalten? Die Untersuchung ergibt, daß das letztere der Fall ist, daß also z. B. bei einer äquatorial oder zur Äquatorialrichtung parallel gestellten geraden Drahtanode die Magnetkanalstrahlen nach allen Seiten radial bzw. wie in Fig. 12 zum Draht gerichtet sind, daß aber ihre Intensität variiert mit ihrer Lage zu den Kraftlinien.

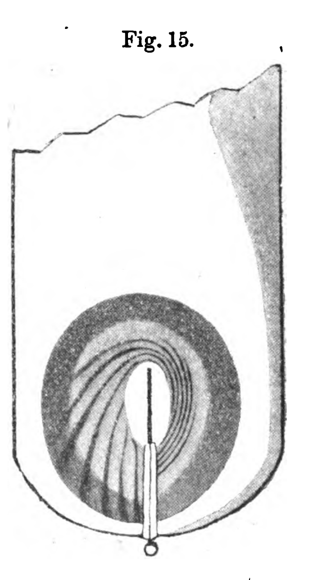
Die Gebilde, aus denen die Ovalscheibe sich zusammensetzt, bleiben in der Äquatorialebene, bzw. soweit sie senkrecht zu dieser Ebene endliche Dicke haben, symmetrisch zu ihr liegen, solange die Anode mit den ihr nächsten Ellipsen von beiden Polen gleichen Abstand hat. Ist letzteres nicht mehr der Fall, namentlich außerhalb des Interferrikums, so treten sehr markierte Änderungen der Erscheinungen ein: es neigt (wieder die frühere vertikale, äquatoriale oder zur Äquatorialrichtung parallele Stellung der Anode vorausgesetzt) der obere Teil der Scheibe sich demjenigen Polschuh zu, dem die Scheiben näher liegen, der untere von ihm fort. Es erfolgt also eine Art Drehung um die Horizontale. Gleichzeitig treten aber die bisher sämtlich in (und nahe) der Äquatorialebene gelagerten Gebilde auseinander,



indem sie einen nach oben geöffneten Fächer von Lichtflächen bilden, wobei z. B. auch die Lamellen sich fächerartig hintereinander lagern, jede einzelne desto weiter aus der Äquatorialebene zurücktretend, je näher der Anodenspitze sie früher verlief. Gleichzeitig spreizen die Lamellen sich auch für die axiale Gesichtslinie voneinander, und die Gestalt der vorher schmalen, nahe linearen Zungen nähert sich schließlich einer relativ breiten Dreiecksform, wie sie z. B. die äußeren Blüten der Kornblume zeigen.

Gleichzeitig aber erscheint nun an der Normalseite des Drahtes eine äußerst zierliche Differenzierung in Gestalt schmaler, gegen die Anode konkav gekrümmter und auf ihren Fuß zulaufender heller Lichtstreifen (Fig. 15, rechts). Ihre Dicke beträgt in einem starken Felde an einer 1 cm langen Drahtanode nur etwa $^{1}/_{5}$ mm, ihre Anzahl dann etwa 10. Die Dicke nimmt zu, die Anzahl ab, wenn die Feldstärke kleiner wird. Zugleich entfernen sie sich dann sämtlich von der Anode, während auch ihre gegenseitigen Abstände sich vergrößern. Diese Lichterscheinung mag vorläufig die neutrale Bezeichnung „Multiple Streifen“ tragen. Die multiplen Streifen sind cet. par. dicker an längeren Drähten, und auch ihre gegenseitigen Abstände sind dann etwas größer. — In der erwähnten unsymmetrischen Stellung der Anode zeigt also die Normalseite eine Differenzierung auch an dünnen Drähten, während in der symmetrischen Lage solche Drähte an der Normalseite nur eine undifferenzierte, schwach leuchtende Halbellipse (vgl. Figg. 2 und 4 neben dem Dunkelraume) erkennen lassen.

Fig. 15.



Wenn nun die Lichtgebilde der Ovalscheibe die beschriebene Schrägstellung angenommen haben, so erfahren auch die *MK*-Strahlen dem Anschein nach genau entsprechende Schwenkungen: Von dem oberen Teil des Drahtes geht ein schräg, z. B. nach links oben, von dem unteren Teil ein schräg nach rechts unten gerichtetes, stark divergentes Strahlenbündel mit entsprechend breiten (gelben oder grünen) Schnittspuren aus. Auch hier aber

scheint in Wirklichkeit hauptsächlich eine Verlagerung der Intensität vorzuliegen, denn Schattenlinien werden dabei nicht verschoben.

§ 6.

Eine erhebliche Anzahl der bisher beschriebenen Erscheinungen kann man z. B. an einer Röhre wie Fig. 16 demonstrieren, bei welcher die Anode der 2 cm lange, 1 mm dicke Draht *a* in einem etwa 35 mm weiten Zylinder ist, während r_1, r_2 und r_3 28 mm weit sind.

Fig. 16. 1/3 nat. Gr.

Im feldfreien Raume ist die Anode bei relativ geringer Dichte von einem schmalen Lichtnebel umhüllt, die Seitenröhren sind lichtlos. Wird aber das Feld, zwischen dessen Polen *a* äquatorial liegt, erregt, so zeigt sich die in Fig. 16 dargestellte Erscheinung. Man sieht helles Leuchten des Gases (in Wasserstoff bläulich, in Stickstoff und Sauerstoff gelblich) sich in beide Seitenröhren (r_1 und r_2) erstrecken, aber etwas heller an der Normalseite (in der Figur links) als an der Anomalseite. Die Ausbreitung des Lichts zeigt, daß es sich um Strahlen handelt. Denn die Kugel *K* wird bis zur Wandung von einem leuchtenden Kegel durchsetzt, der die Geradlinigkeit der Ausbreitung und zugleich auch die Divergenz der Strahlungsrichtungen veranschaulicht. Dabei weicht der untere Saum des Kegels an der Normalseite gegen die Horizontale stärker nach unten ab, als der obere Saum nach oben. Wird das Feld umgekehrt, liegt der Strahlenkegel also an der Anomalseite, so tritt an der Oberseite eine

starke Ablenkung nach oben auf. — Der Kugelraum um den Strahlenkegel zeigt sich von einem matteren Nebellicht völlig erfüllt, das die Diffusion der primären Strahlen an den Gasteilchen demonstriert.

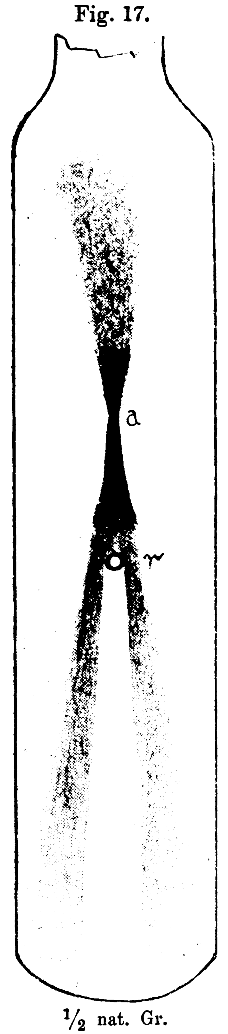
Ganz analog zeigt sich an der rechten Seite der Röhre in r_2 der Strahlencharakter des Lichts, denn das helle Leuchten des Gases reicht an der Biegung B nur so weit, wie geradlinige, mäßig divergente um a entspringende Strahlen sich ausbreiten können. Wird die Gasdichte relativ gering, so bemerkt man auch die Erzeugung des gelben (bzw. grünen) Wandlichts durch die Strahlen. In K erscheint der Durchschnitt des Kegels mit der Wandung gelbleuchtend; an der Biegung B schließt eine nach unten konvexe gelbe Kappe die von der Anode kommenden Geraden ab. Auch an der Ober- und der Unterseite der Seitenrohre r_1 und r_2 erzeugen die Strahlen Gelblicht. Es ist, wenn z. B. wieder die Normalseite links liegt, in r_1 an der Unterseite heller (und weiterhin zu verfolgen) als oben; in r_2 ist es dann oben heller. Besonders deutlich kann man, wenn auch nicht auf größere Entfernungen, das Vorhandensein einer Strahlung demonstrieren, indem man parallel zu a in r_2 einen geraden Draht d (oder ein Glasstäbchen) einsetzt, so daß er oben die Wand nahe oder völlig erreicht. Dann geht von diesem (neutralen) Draht an der oberen wie an der unteren Wand im Gelblicht eine scharfe, schwarze, gerade (sich schwach verbreiternde) Schattenlinie entlang der Rohrachse aus, deren Fortsetzung auch die gelbe Kuppe an B durchsetzt.

Dreht man nun die Entladungsröhre, also auch r_2, um die Vertikalachse, so hat es täuschend den Anschein, als wenn die in r_2 verlaufenden MK-Strahlen und das von ihnen z. B. an der Oberseite erregte Phosphoreszenzlicht um den Betrag des Drehungswinkels abgelenkt würden, — denn das Licht wandert dann, je nach dem Drehungssinn, von der Oberseite schräg an die vordere oder hintere Seite von r_2. Dabei aber zeigt der Schatten von d keinerlei Ablenkung oder Krümmung; er bleibt in seiner ursprünglichen Lage und ohne Deformation liegen, solange noch überhaupt Phosphoreszenzlicht an der Oberseite vorhanden ist. Es findet also keine Ablenkung der Strahlen selbst statt, nur ihre Intensität wird anders verteilt. Natürlich kann man auch an a selbst auf der Anomalseite die Lamellenreihe beobachten, und wenn man als Anode an Stelle eines einfachen Drahtes ein Blech wie Fig. 7

benutzt, auch die zierlichen Gänge der Schuppenkurve, in beiden Fällen mit der leuchtenden Ovalscheibe und deren eventuellen elliptischen Teilungen. —

Zur einfachen Demonstration der Tatsache, daß das im Magnetfelde von der Anode ausgesandte Licht wirklich eine Strahlung enthält, genügt eine Röhre wie Fig. 17, in welcher dem zur Rohrachse senkrechten, etwa 2 cm langen Anodendraht *a* parallel in 3 bis 4 cm Abstand ein Glasröhrchen von etwa 4 mm äußerem Durchmesser eingesetzt ist, welches den Gefäßzylinder in seiner ganzen Weite durchsetzt. Der Zylinder ist im feldfreien Raume unterhalb *r* ganz dunkel. Wird nun bei äquatorialer Lage von *a* der Magnet erregt, so geht helles (in Wasserstoff rosa) Licht, in welchem *r* einen Schattenraum entwirft, bis zum Boden. Ist die Gasdichte so weit verringert, daß die Gefäßwand das gelbe Leuchten (mit der *D*-Linie im Spektrum) zeigt, so treten, entsprechend dem Schatten des Drahtes *d* an der vorhergehenden Röhre, auch hier, aber auf größere Entfernung erkennbar, im Lichte der Wandung ganz scharfe, geradlinig begrenzte lange Schatten auf. —

Fig. 17.



½ nat. Gr.

Die große mehr als meterlange Längenausdehnung der *MK*-Strahlen bei geringen Dichten kann an einem Rohr wie Fig. 18 nachgewiesen werden. In *K* zeigt sich wieder der divergente Kegel. — Bei dieser Demonstration ist zu beachten, daß die lange Rohrwand selbst sich schließlich ladet, und dann bei der Selbstentladung der Wandung das Licht der *MK*-Strahlen verdeckt werden kann. Es genügt aber, die Rohrwand zwischen *K* und *a* — am besten an einer der Anode nahen Stelle — zu umfassen bzw. abzuleiten. Über die abgeleitete Stelle hinaus treten dann keine parasitären Entladungen auf, und man hat zwischen dem kugeligen Ende und

der abgeleiteten Stelle im Rohr nur das Licht der *MK*-Strahlen. Die *MK*-Strahlen können von den parasitären Entladungen leicht dadurch unterschieden werden, daß die letzteren schon von einem sehr schwachen Magneten in einen dünnen Strang kondensiert werden, während die *MK*-Strahlen dabei unbeeinflußt bleiben.

§ 7.

Wir haben weiter oben gesehen, daß die *MK*-Strahlen, die durch eine Diaphragmaöffnung treten, an der Wandung gelbe oder grüne Flecke, Bilder der Öffnungen, erzeugen. Die grünen Flecke fallen aber mit den gelben in starken Feldern nicht zusammen — man bemerkt also z. B. im Falle der Fig. 12 im

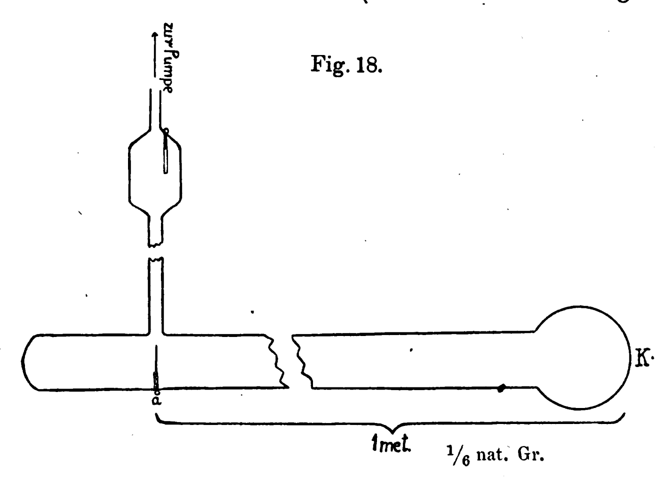


Fig. 18.

allgemeinen zwei Bilder jeder Öffnung, von denen aber meist das eine viel lichtstärker ist als das andere. Ist der gelbe Fleck durch den Magneten aus der ursprünglichen Strahlrichtung nach unten abgelenkt, so liegt der zugehörige grüne Fleck noch tiefer als der gelbe, und umgekehrt noch höher als der gelbe Fleck, wenn dieser durch das Feld nach oben abgelenkt ist. Bei näherer Untersuchung, wenn man z. B. eine Anordnung wie Fig. 19a (ohne S) benutzt, bemerkt man, daß an den grünen Fleck α, der am hellsten in Wasserstoff ist, sich noch ein langer, kontinuierlicher grüner Lichtschweif β auf der Wandung anschließt, der um so länger wird, je stärker das Feld ist (Fig. 19b). Man erzielt schließlich Lagen des Schweif-Endes, die auf Ablenkungen von 90^0 oder nahe

90° der zugehörigen Strahlen schließen lassen. Ihre Ablenkung übertrifft also auch die Ablenkung des rundlichen grünen Flecks außerordentlich, erfolgt aber im selben Sinne.

Die Erscheinungen bedeuten offenbar, daß von der Anode eine (mindestens) dreifache Strahlung ausgeht, die durch den Magneten in ihre Komponenten zerlegt wird. Auch diese Erscheinungen werden bei Benutzung der Influenzmaschine, also bei gleichbleibendem Entladungspotential, erzeugt. Eine ganz entsprechende Spaltung hat W. WIEN[1]) an Kanalstrahlen beobachtet,

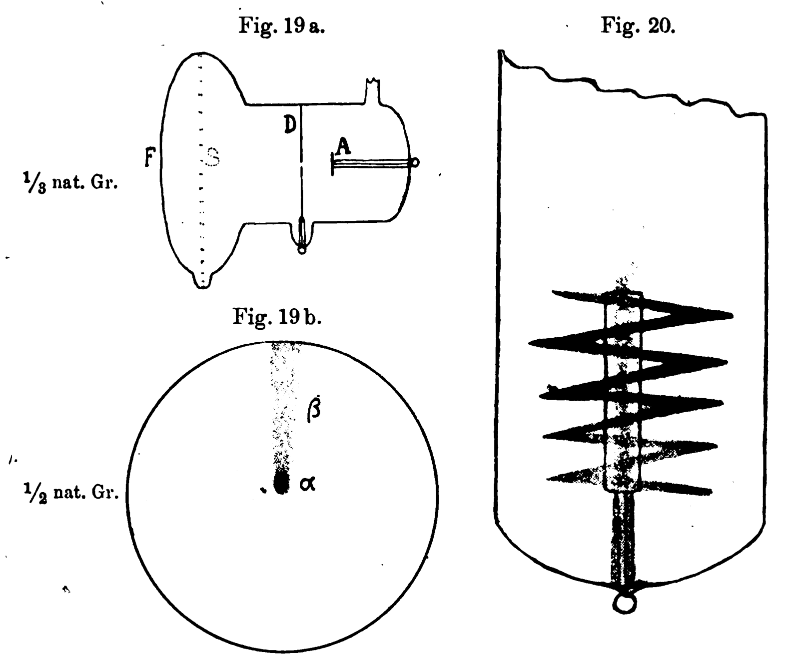


Fig. 19a. 1/3 nat. Gr.

Fig. 19b. 1/2 nat. Gr.

Fig. 20.

wobei die Entladungen ebenfalls von einer Influenzmaschine geliefert wurden. Nach den Resultaten, die GEHRCKE und REICHENHEIM[2]) an Kanalstrahlen mit Magnetpolen von besonders zweckmäßiger Form erzielt haben, darf man wohl vermuten, daß der oben erwähnte kontinuierliche Lichtschweif sich bei entsprechender Versuchsanordnung in ein diskontinuierliches „Spektrum" auflösen lassen wird.

---

[1]) W. WIEN, Ann. Phys. (4) 5, 431, 1901.

[2]) E. GEHRCKE u. O. REICHENHEIM, Verh. d. D. Phys. Ges. 12, 414, 1910.

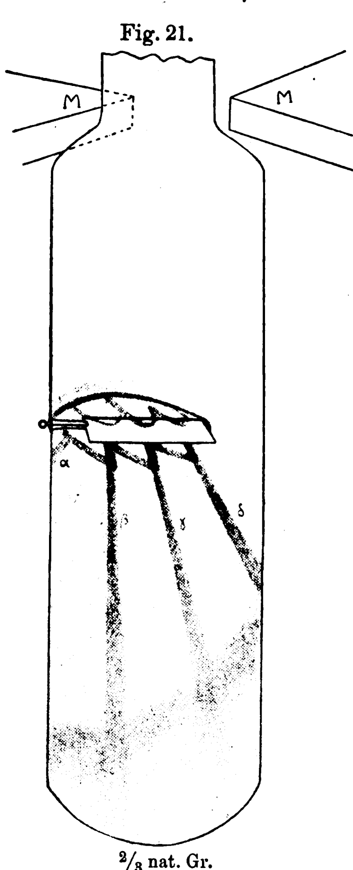
§ 8.

Weiter oben waren Lichtkurven (blau in Wasserstoff und Stickstoff) beschrieben, die zickzackförmig entlang einer rechteckigen Anode verlaufen. Wenn diese Erscheinungen im Gase auftreten, so bemerkt man bei relativ starken Verdünnungen zugleich ein sehr auffallendes Phänomen an der Wandung: Gegenüber der Anode erscheint an der Normalseite im Phosphoreszenzlicht der Glaswand, z. B. in möglichst reinem Wasserstoff eine aus schmalen grün leuchtenden Linien gebildete Zickzackkurve mit scharfen Winkeln (Fig. 20). Die Breite der grünen Lichtlinien ist cet. par. um so kleiner, je größer ihre Anzahl. Die Länge der Linien (Amplitude der Kurve), also die Strecke zwischen je zwei Winkelpunkten, hängt abgesehen von rein geometrischen Verhältnissen (Weite der Röhre, Abstand zwischen Wand und Anode) cet. par. ab von dem Azimut der Anodenebene gegen die Äquatorialebene. Stehen diese beiden Ebenen senkrecht aufeinander, so ist die Ganglänge der Kurve ein Minimum bzw. Null, an der Wand erscheint nur der schmale gerade Lichtstreifen, der dem Durchschnitt der Magnetkanalstrahlen mit der Gefäßwand entspricht. Wird der Winkel der beiden Ebenen ein wenig geändert, z. B. durch eine kleine Drehung der Röhre um die Vertikale, so erhält dieser Streifen kurze Auszackungen nach rechts wie nach links, die sich bei weiter zunehmender Drehung der Röhre mehr und mehr bis zu einem Maximum in die hin und her laufende schmale Lichtlinie verlängern. Die Länge der Linien wird dann durch die Äquatorialebene nicht mehr halbiert, sondern die größere Länge der einzelnen Gänge liegt an derjenigen Seite der Äquatorialebene, an welcher die Anode von der Glaswand den größeren Abstand hat.

Man kann gegenüber einer Anode von etwa 25 mm Länge bisweilen mehr als 20 Gänge einer solchen Zickzackkurve unterscheiden. Ihre Zahl ist aber für die einzelne Anode nicht konstant und variiert mit der Stärke des Magnetfeldes dergestalt, daß sie mit dieser wächst, wobei dann die Lichtlinien, während sie sich dichter aneinanderdrängen, zugleich schmaler werden. Bewegt man den Anodenteil durch Drehung der Röhre um eine horizontal-axiale Linie abwechselnd in ein stärkeres und ein schwächeres Feld, so hat man den Eindruck, als wenn die Kurven-

gänge im selben Tempo, gleich den Windungen einer elastischen Spirale abwechselnd zusammen- und wieder auseinandergehen. Gleichzeitig aber bemerkt man, daß im selben Tempo Zahl und Dichte auch der Zickzackgänge an der blauen Schuppenkurve der Anode sich ändern, und zwar dergestalt, daß die Zahl der grünen Gänge an der Wand stets gleich ist der Zahl der Gänge der blauen Anodenkurve.

Fig. 21.



$^2/_3$ nat. Gr.

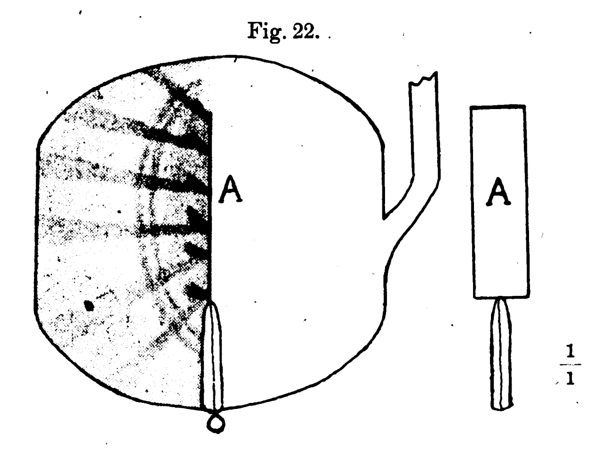
Blickt man nun auf die Röhre von der Seite, d. h. in ungefähr axialer Richtung, so sieht man von der Anodenkurve gerade, schwach divergente Strahlenbündel im Gase nach der Wandung hin laufen (in Wasserstoff blaßbläulich, in Sauerstoff olivgelb). Die grüne Zickzackkurve bildet den Durchschnitt dieser Strahlen mit der Wandung. Es breiten sich also von jenen Anodenkurven gerade Strahlen aus.

In Fig. 21 gebe ich ein Bild der Erscheinung in einem etwa 4 cm weiten Zylinder mit einem horizontalen Anodenblech von 10 × 25 mm, dessen Längskanten mit der Äquatorialebene einen kleinen Winkel bilden, und an welchem die blaue Schuppenkurve an der Unterseite liegt. *MM* sind die Magnetpole. Man bemerkt dann z. B. in Sauerstoff die vier olivgelben Strahlenbündel $\alpha\beta\gamma\delta$, wenn man entlang der einen Reihe der Zickzackgänge blickt, und an ihrer Stelle vier andere Bündel, wenn man entlang der zweiten Gangreihe visiert. Es geht also von jedem Gange der Schuppenkurve ein Bündel geradliniger Strahlen aus. Fig. 22 zeigt die Erscheinung bei einer ähnlichen Anordnung mit schmalerer Anode, bei welcher die

Anode den Magnetpolen näher liegt, so daß die Schuppenkurve eine größere Gangzahl erhält. Auffällig ist nun die durch die Ganglängen der Wandkurve erwiesene große Apertur dieser Bündel in Richtung quer zur Zylinderachse. In einem Falle wurde diese Apertur zu mindestens 114° bestimmt, während die Blaukurven, mit denen sie offenbar zusammenhängen, bisweilen gleichzeitig (schmale rechteckige Anode) eine Breite von kaum 1 mm, in keinem Falle von mehr als wenigen Millimetern zeigten.

Setzt man parallel zur Anodenlänge zwischen sie und die Wandung einen dünnen Schattendraht ein, so verläuft der Schatten als gerader Strich quer zu den Zickzackgängen. Die Strahlen

Fig. 22.



selbst haben also, wie auch a priori einleuchtet, nicht Zickzackform, sondern sie sind durchweg geradlinig, aber zu breiten, ebenen Fächern angeordnet (z. B. von 114° Apertur), die zusammen eine Art Treppe bilden, deren breite Stufen der Zahl der blauen wie der grünen Kurvengänge entsprechen. Wegen des z. B. in Wasserstoff sehr kräftigen Grünlichtes dieser Wandkurven, das an die Lichterregung durch Kathodenstrahlen erinnert, könnte man zunächst geneigt sein, die zur Wand laufenden Strahlen selbst als eine Art Elektronenstrahlen anzusehen. Dem widerspricht aber ihre Geradlinigkeit auch in sehr starken Magnetfeldern. Es sind Ionenstrahlen, und zwar wiederum Strahlen positiver Ionen. Dafür spricht auch folgendes:

Nicht selten, namentlich, wenn auch Sauerstoff zugegen ist, sieht die grüne Kurve dadurch unscharf aus, daß eine gelbe gleichgestaltete Kurve ihr sehr naheliegt und ihre einzelnen Gänge teilweise überdeckt. Bei näherem Zusehen bemerkt man, daß die grüne Kurve an der Außenwand, die gelbe an der Innenwand liegt. Das deutet darauf, daß hier wieder eine durch den Magneten teilweise auseinandergelegte Doppelstrahlung vorliegt. Man kann die teilweise Zerlegung auf optischem Wege für den Beobachter zu einer vollständigen machen. In einem bereits oben zitierten Aufsatz über den Einfluß der Lichtbrechung auf die Erscheinung in GEISSLERschen Röhren hatte ich darauf hingewiesen, daß die gelbe und die grüne Lichterregung, welche durch Kanalstrahlen an der inneren Glaswand veranlaßt werden, bei nicht zu dickwandigen Röhren durch das Rohr selbst auseinandergelegt werden, insofern das grüne Licht an die Außenwand versetzt erscheint. Ferner hatte ich l. c. gezeigt, daß diese Auseinanderlagerung noch erheblich gesteigert werden kann, wenn man den betreffenden Teil der Entladungsröhre mit einem wassergefüllten zylindrischen Gefäß von geeigneten Dimensionen umgibt. Dann ist das grüne Licht der Wandung scheinbar an die Außenwand des Wassergefäßes versetzt, also z. B. unter Umständen um mehr als 1 cm von dem Gelblicht getrennt. Nach demselben Verfahren lassen sich nun auch die grüne und die gelbe Zickzackkurve, welche von den positiven Strahlen erzeugt werden, weit voneinander trennen. Dann verschwindet die auf der teilweisen Überlagerung beruhende Undeutlichkeit, und beide Kurven erscheinen völlig deutlich und scharf.

Um die besondere Art der Ausbreitung und Anordnung zu charakterisieren, welche die diesen Zickzackkurven zugrunde liegenden Strahlen zeigen — die im übrigen den Magnetkanalstrahlen durchaus wesensgleich zu sein scheinen —, sei es gestattet, sie als „Fächerstrahlen“ zu bezeichnen. Die vermutliche Ursache der besonderen Ausbreitung bzw. Intensitätsverteilung soll später erörtert werden.

§ 9.

Bei der Betrachtung der Lichterscheinungen an der Anode hatten wir bisher ganz abgesehen von dem sogenannten positiven Glimmlicht, welches in einer für die sonst untersuchten



Gasdichten allbekannten Weise sich von der Anode bis in die Nähe der Kathode erstreckt. Auch dieses Licht zeigt bei geringen Gasdichten im Magnetfelde neue Eigenschaften. Bekannt ist, daß das gewöhnliche Glimmlicht bei äquatorialem Verlauf durch den Magneten in einen schmalen Lichtstrang kondensiert wird, der die Glaswand in und nahe der Äquatorialebene berührt. Bei sehr geringen Dichten wird aber dieser schmale Strang durch ein breiteres, jedoch ganz dünnes Lichtband ersetzt. Es kann die Glaswand, wo es sie berührt, zum Phosphoreszieren erregen. Man weiß, daß das gewöhnliche Thüringer Hohlglas gelbgrün phosphoresziert, und daß bei der Erregung z. B. durch Kathodenstrahlen abgesehen von Intensitätsverhältnissen ein Einfluß des Elektrodenmaterials nicht existiert.

Benutzt man in solchem Hohlglas eine Platinanode, so erregt das vom Magneten an die Wand gedrängte breite dünne Lichtband nach ganz kurzer Zeit vergißmeinnichtblaues Phosphoreszenzlicht, und benutzt man eine Kupferanode, so leuchtet die Wand in kurzem prächtig apfelgrün. Bei anderen Metallen, Aluminium, Nickel, Kadmium, Zink, Gold, Silber, habe ich eine Ersetzung des gewöhnlichen gelbgrünen Lichtes durch andersfarbiges Leuchten nicht konstatieren können. An dem durch Platin oder Kupfer veranlaßten Leuchten aber kann man folgendes feststellen: Man erhält an denselben Wandstellen, die im positiven Licht vergißmeinnichtblau oder apfelgrün geleuchtet hatten, wieder gelbgrünes Licht, wenn man (nach Ausschaltung des Magnets) den Draht zur Kathode macht oder wenn man ihn weiter als Anode benutzt, aber durch ableitende Berührung (eventuell unter Einschaltung einer äußeren Funkenstrecke) eine dem betreffenden Wandstück gegenüberliegende Stelle zu einer sekundären Kathode macht. Ferner erhält man an diesem Wandstück blaues oder apfelgrünes Licht, wenn man an Stelle der Platin- bzw. Kupferanode nachträglich z. B. eine Aluminium- oder Nickelanode einsetzt. — Diese Beobachtungen legen den Schluß nahe, daß unter der Einwirkung der Kupfer- wie der Platinanode die Innenwand eine Veränderung erfahren hat, aber nur in einer sehr dünnen Oberflächenschicht, die dann in wenig durchdringenden Strahlen mit ihrer eigenen, besonderen Farbe leuchtet. Läßt man auf die modifizierte Stelle aber die stärker penetrierenden gewöhnlichen Kathodenstrahlen fallen, so erreichen

*

diese die nichtmodifizierten Schichten und erregen das gewöhnliche Gelbgrünlicht. Die materielle Veränderung selbst entsteht vermutlich durch eine Verdampfung des Platins oder Kupfers und Auflagerung eines Depositums auf die Gefäßwand — obwohl die letztere für das Auge völlig klar bleibt (wenn nicht eine sehr langdauernde Benutzung und Erhitzung der Anode stattgefunden hat). Die modifizierte Schicht dürfte ein Metallhydrür oder eine andere Metallverbindung sein; denn Phosphoreszenz eines reinen festen Metalles ist ja noch nicht beobachtet worden.

Weiter oben war beschrieben, wie sich im Gase an der Normalseite der Anode im Magnetfelde Zickzackkurven bilden. Aber auch in weiterem Abstande von der Anode, können im positiven Glimmlicht Zickzackkurven von ganz ähnlichem Aussehen auftreten, wenn man bis zu starken Gasverdünnungen herabgeht. Dann verläuft z.B. in äquatorial gestellten Zylinderröhren das positive Glimmlicht nicht mehr als gerader schmaler Strang oder glattes Band an der Wandung, sondern bildet lange Zickzacklinien, wie sie in Fig. 23 und Fig. 24a abgebildet sind. Die Kurven sind nahezu, aber nicht völlig eben; sie ähneln Wendeltreppen mit geraden Hin- und Hergängen. Wie die gegen Fig. 24a um 90° gedrehte Fig. 24b zeigt, liegen sie nicht diametral zur Röhre, sondern näher der Normalseite [1]). Je kleiner die Rohrweite ist, desto näher liegen die einzelnen Gänge aneinander, desto größer ist also die Anzahl der Zickzacks auf einer gegebenen Strecke (wie z. B. der Vergleich von Fig. 23 mit Fig. 24a zeigt), und desto dünner werden cet. par. auch diese Lichtstränge, aus denen die Kurve besteht. Ich habe diese Erscheinungen bei Röhren von 5 bis 50 mm Durchmesser beobachtet. Engere und noch weitere wurden daraufhin nicht geprüft. Die Gänge treten auch desto näher aneinander, je näher die betreffende Stelle den Magnetpolen liegt. Die Schnittstelle der einzelnen Gänge mit

---

[1]) Da bei der Entladung im Dunkelzimmer die äußere Begrenzung des Gefäßzylinders hier hauptsächlich erkennbar wird durch das in seinem Durchschnitt mit der Entladung an ihm erregte schwache Phosphoreszenzlicht, und da die Entladung exzentrisch liegt, so erscheint der Zylinder dann enger als im erleuchteten Zimmer: Die punktierten Linien in Fig. 23 u. 24a geben die wirkliche, die ausgezogenen die scheinbare Gefäßweite.



Fig. 23.

1/1

Fig. 24 a.

1/1

Fig. 24 b.

1/1

der Glaswand leuchtet gelbgrünlich oder, namentlich in Sauerstoff, rötlich[1]). Die Farbe der Gänge ist rosa in Wasserstoff, bläulich in Stickstoff. Über die ganze Erscheinung lagert sich an der Normalseite noch ein blasser kontinuierlicher Lichtnebel, der einseitig bis dicht an die Gefäßwand tritt, wie Fig. 24b zeigt.

Berlin-Schöneberg,
Physikal. Laborat. d. Universitäts-Sternwarte.

---

1) *rr* in Fig. 24a ist rotes Leuchten der Glaswand, das vom positiven Glimmlicht in der Nähe der Anode in starken Feldern erzeugt wird. Auch sonst tritt in diesen Versuchen öfters rotes Leuchten des Glases auf, z. B. an den Glasstielen der Anoden, besonders an der Normalseite. Das Rotlicht entspricht in Farbe und Spektrum dem von E. Lilienfeld (Verh. der D. Phys. Ges. **9**, 125—135, 1907) unter anderen Bedingungen bemerkten Rotlicht der Wandung.

Einige Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn F. Dessauer, „Über einen neuen Hochspannungstransformator[1]) usw."

Von J. E. Lilienfeld.

(Eingegangen am 14. August 1918.)

I. Es besteht eine gewisse Unstimmigkeit zwischen der Seite 208 von Herrn DESSAUER gemachten Angabe, eine mittlere effektive Wechselspannung von 240000 Volt bedinge eine Überschlagsweite von 60 bis 70 cm Luftstrecke, und den Erfahrungen, welche man im allgemeinen gelegentlich des Baues von Hochspannungstransformatoren zu sammeln Gelegenheit hatte. Transformatoren, welche auf 110000 Volt übersetzt sind, werden seit Jahren serienweise gebaut. Die Überschlagsweite zwischen Spitze und Platte liegt bei der vollen Spannung ungefähr bei 30 cm. Da aber mit wachsender Spannung bekanntlich die Überschlagsweite erheblich rascher als linear ansteigt, ist schon aus dieser Alltagserfahrung zu entnehmen, daß für eine Spannung von 240000 Volt eine sehr viel größere Überschlagsweite zu erwarten ist, als die von Herrn DESSAUER angegebene. In der Tat ist bei auf 250000 Volt übersetzten Transformatoren, die von dem Transformatorenwerk Koch & Sterzel, Dresden, hergestellt wurden, wiederholt beobachtet worden, daß die dieser Spannung entsprechende Überschlagsweite zwischen 105 und 110 cm liegt. Diese Unstimmigkeit zwischen der allgemeinen Erfahrung und der auf den DESSAUERschen Transformator bezogenen Angabe weist darauf hin, daß in beiden Fällen voneinander sehr abweichende Verhältnisse vorliegen. Möglicherweise liefern die Transformatoren des Herrn DESSAUER bedeutend geringere Scheitelwerte der Spannung als die üblichen elektrotechnischen Apparate. Vielleicht ist aber der Unterschied dadurch bedingt, daß (wenn ich den Wortlaut der Arbeit recht verstehe) die Spannungsbestimmung an den

[1]) Vgl. diese Verhandlungen **19**, 155—230, Nr. 17/18 vom 30. Sept. 1917.

unbelasteten, stromlosen Sekundärklemmen der einzelnen Unterteilungen des DESSAUERschen Gesamtaggregates vorgenommen wird. In einem solchen Falle braucht zunächst die Summe der Teilspannungen nicht unbedingt der tatsächlich auftretenden Gesamtspannung bei Hintereinanderschaltung der Transformatoren gleich zu sein. Hauptsächlich sei aber bemerkt, daß auf alle Fälle eine solche Messung keinen Rückschluß darauf gestattet, welche Spannung auftritt, wenn Transformatoren von der DESSAUERschen Bauart sekundär auf Stromentnahme beansprucht werden, so z. B. während des Stromdurchganges durch eine Röntgenröhre. Denn diese Transformatoren werden mit Vorschaltwiderstand betrieben, sie koppeln nur lose infolge ihres offenen Eisenkernes. Diese Verhältnisse wirken aber dahin, daß die Sekundärspannung bei Stromentnahme erheblich abfällt gegenüber der Spannung bei offenen Sekundärklemmen, und das kann unter Umständen auch eine Verringerung der Überschlagsweite bedingen.

Wenn ich auch oben einige Möglichkeiten angedeutet habe, wie die eingangs erwähnte Unstimmigkeit erklärt werden könnte, so möchte ich andererseits ausdrücklich hervorheben, daß ich es nicht anstrebe, eine endgültige Erklärung dafür zu geben. Für dasjenige Gebiet, für welches Herr DESSAUER seine Transformatorenanlage vornehmlich angewandt wissen will — nämlich für den Betrieb von Röntgenröhren —, erscheint mir lediglich folgende Schlußfolgerung von Interesse: Aus der Angabe Herrn DESSAUERs über die Überschlagsweite und die effektive Mittelspannung seiner Transformatoren erhellt, daß die Transformatorenanlage nach Herrn DESSAUER, wenn die Bestimmung ihrer Spannung nach der DESSAUERschen Methode erfolgt, eine ganz erheblich höhere sekundäre effektive Mittelspannung leisten muß als ein berechnungsweise auf die gleiche Sekundärspannung übersetzter Transformator von der üblichen technischen Bauart, wenn im Hinblick auf die höchste auftretende Spannung in beiden Fällen die gleiche äußerste Härte bei gleicher Intensitätsverteilung im kurzwelligen Teile des Spektrums erreicht werden soll, sonst gleiche Verhältnisse vorausgesetzt.

II. Zu der von Herrn DESSAUER für die Absorptionsanalyse der Strahlung benutzten Meßanordnung ist zunächst ganz allgemein folgendes zu bemerken.



Der Massenabsorptionskoeffizient der Röntgenstrahlung setzt sich aus zwei additiven Gliedern zusammen nach der Formel:

$$\frac{\mu}{\varrho} = \frac{\tau}{\varrho} + \frac{\sigma}{\varrho},$$

wobei τ den Energieverlust durch Umsetzung in andere Energiearten bedeutet, während σ der diffus zerstreuten Strahlung entspricht; dabei ist σ/ϱ eine universelle Konstante, der in der Literatur im allgemeinen der Betrag von 0,12 beigelegt zu werden pflegt.

Bei oberflächlicher Überlegung könnte es scheinen, als ob es möglich wäre, τ/ϱ durch direkte Messung zu bestimmen, wenn es gelänge, die Meßanordnung so zu gestalten, daß nicht nur das primäre, aus dem Filter austretende Strahlenbündel, sondern auch die gesamte Streustrahlung mit gemessen würde. Das ist aber aus zwei Gründen nicht angängig.

Hauptsächlich aus einem praktischen: Denn es ist keine Meßanordnung denkbar, welche die gesamte Streustrahlung zu fassen gestatten würde. Was in der Ionisationskammer zur Wirkung gelangt von der Streustrahlung, das ist stets nur ein undefinierter, mit zahlreichen Parametern sich ändernder Bruchteil der Streustrahlung. Darüber muß man sich hauptsächlich dann klar sein, wenn Strahlen größerer Härte untersucht werden sollen, da bei diesen der von der Streustrahlung bedingte Fehler ganz außerordentlich groß werden kann. Es sei nur darauf hingewiesen, daß schon bei der Wellenlänge der Eigen-K-Strahlung der gebräuchlichen Antikathodenmaterialien der Streustrahlung ein ebenso großer oder noch größerer Anteil am Massenabsorptionskoeffizienten zukommt als der eigentlich absorbierten Strahlung.

Der zweite der oben angedeuteten Gründe, weshalb es nicht anzustreben ist, die Streustrahlung mitzumessen, beruht in der Schwierigkeit, die Streustrahlung von der charakteristischen Strahlung zu trennen, welche letztere ja (neben dem Wärmeeffekt und der korpuskularen Strahlung) bereits Bestandteil von τ/ϱ ist.

Aus diesen beiden Gründen erscheint es unmöglich, τ/ϱ direkt zu bestimmen. Der direkten Messung zugänglich ist lediglich μ/ϱ, aus dem nach der oben angeführten Formel τ/ϱ im Bedarfsfalle ohne weiteres durch Subtraktion von $\sigma/\varrho = 0{,}12$ bestimmt werden kann. Eine auf die Messung von μ/ϱ ausgehende Anordnung hat demnach zur vornehmsten Voraussetzung,



daß in ihr der Betrag der mitgemessenen Streustrahlung (aber natürlich auch der in der Ionisationskammer zur Wirkung gelangenden charakteristischen und Korpuskularstrahlung!) unter die Meßfehlergrenze herabgedrückt sei. Ich habe das in einer populären Weise darzustellen versucht und auch eine dementsprechende Meßanordnung beschrieben in meinem gemeinsam mit Herrn KÜPFERLE herausgegebenen, für medizinische Kreise bestimmten kleinen Buche „Grundlagen für Tieftherapie", welches Ende Juni 1917 in Freiburg i. Br. bei Speyer & Kärner erschien. Auch die interessanten Absorptionsuntersuchungen von HULL und RICE sind unter strengster Beachtung des erörterten Gesichtspunktes ausgeführt worden. Angesichts dessen hätte ich es nicht mehr angenommen, daß noch ein Anlaß vorliegen könnte, in einer physikalischen Fachzeitschrift auf diesen Gegenstand zurückzukommen.

Nun entspricht aber die von Herrn DESSAUER benutzte Meßapparatur in keiner Weise dem oben festgelegten Grundsatze. Es wird von ihr ein erheblicher, wenn auch nicht bekannter Bruchteil der jeweiligen Streustrahlung mitgemessen. Außerdem sind in ihr den Röntgenstrahlen bedeutende Metalloberflächen ausgesetzt, welche mit dem zu ionisierenden Luftinhalt der gleichzeitig als Ionisationskammer dienenden Elektroskope in Berührung stehen. Allein dadurch können bedeutende, unkontrollierbare Fehler bedingt werden. Aber selbst, wenn die letztere Fehlerquelle nicht von Gewicht wäre, genügte der zuerst erwähnte Umstand, um es fraglich erscheinen zu lassen, ob aus den Messungen des Herrn DESSAUER weitgehende Schlüsse, z. B. über das Zutreffen der Quantentheorie, gezogen werden dürfen.

In der Tat ist aus amerikanischen, zum Teil bereits in der Arbeit von Herrn DESSAUER angeführten Untersuchungen zu entnehmen, daß zunächst beim Betrieb mit ruhender Gleichspannung die kürzeste auftretende Wellenlänge sicher nicht, wie Herr DESSAUER seinen Messungen zufolge meint, wesentlich länger ist, als von der Quantentheorie verlangt wird. Für gleichgerichteten Wechselstrom haben aber meine gemeinsam mit Herrn H. SEEMANN angestellten Untersuchungen[1]) ergeben, daß

---

[1]) Vgl. Phys. ZS. **19**, 269—271, 1918; bemerkt zu werden verdient, daß — worauf ich von Herrn MANNE SIEGBAHN aufmerksam gemacht wurde — der in dieser Arbeit festgestellte Intensitätsabfall von der K-Strahlung nach den kurzen Wellen zu der Absorption im Wolframspalte des SEEMANNschen



die Grenze der hochfrequenten Strahlung sicher nicht weniger nach den kurzen Wellen zu herausgeschoben ist, als es — wie Herr DESSAUER es für möglich hält — unter Annahme eines Scheitelfaktors von 1,4 der Quantentheorie entsprechend sein müßte.

Im Hinblick auf das im folgenden Abschnitt III Erwähnte mag es dahingestellt bleiben, ob die Tatsache, daß die von Herrn DESSAUER beobachtete, härteste Strahlung bedeutend weicher ist, als die Quantentheorie es verlangt, von der hier im Abschnitt I erörterten Unstimmigkeit in der Beurteilung der für den Röntgenbetrieb verwendeten Hochspannung mit bedingt wird. Es verdient aber in diesem Zusammenhange hervorgehoben zu werden, daß Meßanordnungen von der Art des DESSAUERschen Elektroskops erfahrungsgemäß nicht eine zu geringe, sondern eine zu große Härte der Strahlung vorzutäuschen pflegen. Ich glaube also nicht, daß die Meßanordnung daran schuld ist, wenn die härteste, von Herrn DESSAUER beobachtete Strahlung bei den extremen von ihm angegebenen Spannungen sehr viel weicher erscheint, als die von einem auf 110000 Volt übersetzten gewöhnlichen Röntgentransformator gelieferte kurzwellige Grenze des Spektrums.

III. Aber selbst wenn die unter I und II erörterten Hindernisse, aus den Ergebnissen der Messungen des Herrn DESSAUER weitergehende Schlüsse zu ziehen, nicht vorhanden wären, würde die bei seinen Versuchen mit starken Bleischichten vorgenommene Filterung zu Bedenken Anlaß geben. Denn es ist bekannt, und von HULL und RICE messend verfolgt worden, daß das Absorptionsspektrum des Bleies — übrigens ähnlich wie bei anderen Elementen — bei der Blei-Eigen-K-Strahlung eine Bandkante besitzt. Dergestalt, daß Wellenlängen, welche länger als die Blei-Eigenstrahlung sind, mit verhältnismäßig bedeutender Intensität durchgelassen werden, während kürzere Wellen ganz außerordentlich geschwächt werden. Deshalb ist es bei starker Bleifilterung sehr erschwert, wenn nicht gar vollständig ausgeschlossen, etwas der Beobachtung zugänglich zu machen, was an dem kurz-

---

Spektrographen zuzuschreiben ist. Wird diese Fehlerquelle beseitigt, dann erhält man Photogramme, die bereits unweit von der kurzwelligsten Grenze annähernd ebenso starke Schwärzungen erweisen, wie das kontinuierliche Spektrum in der Umgebung der K-Strahlung.

welligen Ende des Spektrums vor sich geht. Was bei Bleifilterung von der Strahlung einer Wolframantikathode übrig bleibt, das ist erstens die Bleibandkante und zweitens ein gewisser Teil der K-Strahlung des Wolframs, die ja intensiv genug ist, um durch starke Bleidicken durchzudringen. Der Absorptionskoeffizient der bei Bleifilterung übrig bleibenden Reststrahlung wird also in der Mitte liegen zwischen dem Absorptionskoeffizienten der Blei- und Wolfram-Eigen-K-Strahlung; vermutlich merklich näher nach dem Absorptionskoeffizienten der Eigen-K-Strahlung des Wolframs zu. Das stimmt auch ganz gut mit den von Herrn Dessauer angegebenen Zahlen, wenn die hier zu Ende des Absatzes II gemachte Bemerkung berücksichtigt wird, daß seine Meßanordnung vermutlich eine wesentlich größere Härte der Strahlung vortäuscht als die in Wirklichkeit vorhandene.

Zusammenfassung.

I. Der nach Dessauer gemessenen Effektivspannung seiner Transformatorenanlage entspricht eine um 30 bis 40 Proz. geringere Funkenschlagweite als diejenige eines berechnungsweise auf gleiche Spannung übersetzten einfachen technischen Transformators.

II. Bei Bestimmung des Absorptionskoeffizienten werden bei Dessauer von Streustrahlen usw. herrührende Ionisationswirkungen mitgemessen. Da diese aus dargelegten Gründen aber auszuschließen sind, ist es nicht statthaft, aus den Dessauerschen Meßzahlen irgendwelche Rückschlüsse auf μ zu ziehen.

III. Wegen kräftigster Absorption von Strahlen, welche kurzwelliger als die Pb-Bandkante sind, ist es unzulässig, Pb als Filter beim Aufsuchen kurzwelliger Spektrumgrenzen zu benutzen.

Leipzig, Physik. Institut der Universität, August 1918.

Über den Äther;

von E. Gehrcke.

(Eingegangen am 5. September 1918.)

Der eine Zeitlang totgesagte Äther erwacht wieder zu neuem Leben, wie auch eine kürzlich erschienene Abhandlung von LENARD [1]) zeigt. Zur Unterstützung dieser wissenschaftlichen Strömung, die sich wieder auf den Äther besinnt und ihn als ein unentbehrliches Hilfsmittel der Theorie ansieht, mögen auch die folgenden Zeilen mitwirken.

Es ist eine heute ziemlich weit verbreitete Ansicht, daß die Deutung des berühmten MICHELSONschen Spiegelversuches im Sinne einer Mitführung des Äthers mit der bewegten Erde zu der Tatsache der Aberration der Fixsterne im Widerspruch stehe, und daß die Aberration nur mit der Annahme ruhenden, von der Erde nicht mitgeführten Äthers zu begreifen sei. Diese Ansicht ist jedoch irrig. Bereits STOKES hat gezeigt, daß die Aberration qualitativ und quantitativ ohne Zwang herauskommt, wenn man sich vorstellt, daß die Erde den Äther mitnimmt; dann ist auch das negative Ergebnis des Versuches von MICHELSON sofort klar. — Es sei z. B. auf die in der 3. Auflage [2]) von DRUDES Optik gegebene kurze Darstellung der STOKESschen Theorie verwiesen; ferner auf H. A. LORENTZ [3]), der, obwohl er der hauptsächlichste Vertreter der entgegengesetzten Idee des absolut ruhenden, unbeweglichen Äthers ist, in dankenswerter Objektivität die Theorie von STOKES dargelegt hat. Unter diesen Umständen ist es auffällig, daß die Theorie von STOKES nicht allgemein als ein ernster und origineller Lösungsversuch des Problems der Aberration beachtet worden ist.

Es scheint nun aber auf den ersten Blick für die Auffassung des mit der Erde mitbewegten Äthers eine gewisse Schwierigkeit

---

[1]) P. LENARD, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik **15**, 117, 1918.
[2]) S. 470 ff.
[3]) H. A. LORENTZ, Theory of electrons 1909, S. 168 ff.

darin zu liegen, daß eine Anzahl von Laboratoriumsversuchen bekannt ist, die kaum eine andere Deutung zulassen, als die, daß der Träger des Lichts, der Äther, von bewegter Materie nicht mitgeführt wird. So geht z. B. aus dem FIZEAUschen Interferenzversuch hervor, daß ein Lichtstrahl, der sich in der Richtung des strömenden Wassers fortpflanzt, von diesem in keiner Weise mitgenommen wird: der Lichtäther im strömenden Wasser bleibt unbeweglich liegen. In anderen Versuchen beobachtet man dasselbe: hier erklären sich die Beobachtungen restlos durch die Annahme, daß der Äther von den bewegten Körpern nicht mitgeführt wird, sondern daß er ruhen bleibt.

Nun ist aber zu beachten, daß die optischen und elektromagnetischen Experimente mit kleinen bewegten Massen geringer Geschwindigkeiten angestellt werden, und daß im Gegensatz hierzu der MICHELSONsche Spiegelversuch und die Aberration der Fixsterne mit der riesigen Erde als bewegtem Körper, der mit 30 km pro Sekunde um die Sonne läuft, zu tun haben. Der einfachste Schluß scheint mir unter diesen Umständen der zu sein: der Äther ist so beschaffen, daß er von geringen Massen geringer Geschwindigkeit nicht mitgeführt wird, wohl aber von großen und schnell bewegten Massen, wie die Erde. Jede Schwierigkeit verschwindet jetzt, und es wird also eine Versöhnung der entgegengesetzten Standpunkte erzielt: der absolut ruhende, unbewegliche Äther von FRESNEL und der bewegliche, wirbelfreie Äther von STOKES wäre ein und derselbe, doch unter verschiedenen äußeren Bedingungen. Der Umstand, daß uns die Gleichungen dieses Äthers unbekannt sind, wird den Naturforscher nicht stören, der weiß, daß die Natur vor mathematischen Schwierigkeiten nicht zurückschreckt; es scheidet überhaupt die Frage der mathematischen Form der Gleichungen des Äthers hier aus, und es handelt sich vielmehr um die Existenzfrage, ob es wahr ist, daß es einen Äther gibt und welches seine wirklichen Eigenschaften sind.

Daß der Äther bei langsamen Bewegungen irdischer Körper in Ruhe bleibt, zeigt besonders direkt ein schönes Experiment von SAGNAC[1]): auf einer rotierenden Scheibe ist analog dem MICHELSONschen Spiegelversuch eine Spiegelanordnung zur Er-

[1]) G. SAGNAC, C. R. **157**, 708, 1913; Journ. de phys. (5) **4**, 177, 1914.

zeugung von Interferenzstreifen aufgestellt; die gesamte Apparatur, die Lichtquelle eingeschlossen, rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Wenn der Äther bei dieser Rotation mitgenommen würde, so sollte keine Verschiebung von Interferenzstreifen vor sich gehen. SAGNAC findet aber eine der Rotationsgeschwindigkeit proportionale Verschiebung und schließt aus der Größe und Richtung derselben, daß seine Apparate „im Ätherwind" rotieren. Dieses Ergebnis, das positiv ist im Gegensatz zum negativen Versuch von MICHELSON, bestätigt also die älteren Experimente von FIZEAU usw. im Sinne eines nicht mitgeführten FRESNELschen Äthers.

Der Versuch von SAGNAC gestattet noch weitere Ausblicke. Abgesehen davon, daß man mit SAGNACS Anordnung untersuchen könnte, ob der Äther auch ruhen bleibt, wenn der rotierende Körper eine kompakte Bleimasse ist, die den zu untersuchenden Lichtstrahl allseitig dicht umgibt — diese Frage ist nicht ohne Experiment zu beantworten und wäre der Bearbeitung wert —, abgesehen von dieser und ähnlichen experimentellen Fragestellungen kann man dem SAGNACschen Versuch auch eine interessante, grundlegende Seite abgewinnen. SAGNACS Ergebnis läßt sich so ausdrücken: die absolute Rotation ist optisch nachweisbar. Hierbei wird unter „absoluter" Rotation eine solche relativ zum Äther verstanden. Nach unseren bisherigen Kenntnissen war die absolute Rotation nur mechanisch nachweisbar, nämlich durch die Zentrifugalkräfte der rotierenden Massen, jetzt bildet der optische Versuch von SAGNAC eine willkommene Ergänzung zur Mechanik. Hat man einmal „absolute" Bewegung als eine „relativ zum Äther" erfolgende vorgestellt, so erscheint es nebensächlich, ob diese Bewegung krummlinig oder geradlinig, gleichförmig oder ungleichförmig erfolgt; der Nachweis geradliniger, gleichförmiger Bewegung kann technisch schwierig oder gar unmöglich sein, existieren müßte aber eine absolute, geradlinige und gleichförmige Bewegung gerade so, wie die absolute Rotation existiert oder sonst eine absolute Bewegung. Nun legt der Versuch von SAGNAC es nahe, eine Anordnung zu ersinnen, die auch die absolute, geradlinig-gleichförmige Translation optisch erkennbar macht; man hätte nur nötig, den MICHELSONschen Spiegelversuch, statt auf der Erde als Wagen, auf irgendeinem schnell bewegten Vehikel, etwa im Auto oder Flugzeug, anzustellen, und müßte dann, nach

SAGNACS Experiment zu urteilen, die von MICHELSON vergeblich gesuchte Verschiebung der Interferenzstreifen finden; denn diese technischen Apparate werden nicht so wie die Erde den Äther der Umgebung mitnehmen. So einfach dieser Versuch in Gedanken anzustellen ist, so schwierig gestaltete er sich bei seiner wirklichen Ausführung, zumal bei der Translation die zweite Potenz der Geschwindigkeit der Bewegung relativ zur Lichtgeschwindigkeit eingeht. Aber es hieße am Fortschritt der Wissenschaft verzweifeln, wollte man das, was heute technisch schwierig ist, für alle Zeiten für unerreichbar halten, und es wäre etwas kühn, den Nachweis absoluter Translation deshalb für unmöglich zu halten, weil er bisher noch niemandem glückte.

Zum Schlusse dieser Ausführungen sei noch ein kurzes Wort über die von mir ans Licht gezogene GERBERsche Arbeit über die Gravitation gestattet. Herr v. SEELIGER [1]) hat die Richtigkeit dieser Theorie bestritten und sich bemüht, einen „Fehler" in GERBERS Ableitung aufzuzeigen. Herr v. SEELIGER hat aber erstens nicht hervorgehoben, daß die GERBERsche Formel für die Merkurstörung unabhängig von dem von GERBER' gewählten Wege ist; man hat doch nur nötig, die Konstante des WEBERschen elektrodynamischen Potentials:

$$V = \frac{\mu}{r}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

zu verändern und statt $\frac{1}{c^2}$ die Konstante $\frac{3}{c^2}$ zu setzen, um sofort in gewöhnlicher Weise zu GERBERS Kraftgesetz:

$$K = -\frac{\mu}{r^2}\left[1 - \frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{6r}{c^2}\cdot\frac{d_r^2}{dt^2}\right]$$

und damit zum richtigen Werte für die Merkurstörung unter Zugrundelegung der Lichtgeschwindigkeit für c zu gelangen. Es bleibt also durchaus bestehen, daß man zu der von EINSTEIN durch Relativitätsbetrachtungen gewonnenen GERBERschen Formel auch in prinzipiell einfacherer Weise gelangen kann. Zweitens läßt Herr v. SEELIGER unbeachtet, daß der Zusammenhang zwischen Potential und Kraft durchaus nicht allgemein der von ihm angenommene sein muß, der zur Voraussetzung hat, daß lediglich

---

[1]) H. v. SEELIGER, Ann. d. Phys. (4) **53**, 31, 1917.

mechanische Energien, also potentielle und kinetische, vorhanden sind. Wenn z. B. die Gravitation mit einer Absorption von Gravitationsenergie verbunden sein sollte, so würde noch ein Energiebetrag hinzukommen und es würde das Potential nicht gleich der Arbeit zu setzen sein, wie es Herr v. SEELIGER tut. So viel nur, um dazu beizutragen, daß GERBER auch weiterhin der Ruhm erhalten bleibt, aus einer Gravitationserscheinung die Konstante des Äthers, die Lichtgeschwindigkeit, herausgelesen zu haben.

Über Selbstsperrung.

Behandlung eines typischen Falles.

Von Ernst Schenkl.

(Eingegangen am 5. September 1918.)

Unter „Selbstsperrung" oder „Selbsthemmung" wird ein Zustand verstanden, in welchem die Bewegung eines mechanischen Systems unter der Einwirkung einer Kraft in der Richtung der Bewegungsmöglichkeit unmöglich wird[1]) und zwar auch dann, wenn die treibende Kraft bis zu einem gewissen Ausmaße vergrößert oder in ihrer Lage verändert wird. Dieser Bestimmung entsprechen wenigstens viele in ihren Anwendungen wichtige Fälle; eine genaue, ganz allgemeine und alle nicht gemeinten Fälle ausschließende Definition bedürfte allerdings einiger Vorsichtsmaßregeln.

Bei der so beschriebenen Erscheinung ist nun zweierlei zu unterscheiden: das Eintreten der Selbstsperrung[2]) und das Bestehen derselben, je nachdem das betrachtete mechanische System sich im Zustande der Bewegung oder der Ruhe befindet. In den Fällen der Wirklichkeit kommt es einerseits oft darauf an, daß

---

[1]) G. HAMEL, Elementare Mechanik, Leipzig und Berlin 1912, S. 217.

[2]) In diesem Sinne z. B. in den Aufsätzen von F. KLEIN, R. v. MISES, G. HAMEL, L. PRANDTL, ZS. f. Math. u. Phys. 58, 186ff., 1910.

Selbstsperrung nicht eintritt — bei Systemen, die in Bewegung bleiben sollen —, andererseits oft darauf, daß Selbstsperrung sehr bald nach dem Beginne einer Bewegung eintritt und dann gegen einige Größen und Lageänderungen der angreifenden „Last“ gesichert bleibt — bei Systemen, deren Bewegung „von selbst“, d. h. ohne Mitwirkung weiterer äußerer Kräfte gesperrt werden soll. Beispiele sind unter anderem für die erste Gruppe die Schublade und die Vorrichtung zur Hebung eines Pochstempels, für die zweite Gruppe die Aufhängevorrichtung durch Reibungsring oder -hülse, selbstsperrende Keil- und Schraubenverbindungen und manche Hebevorrichtung.

Um nun die für das Eintreten bzw. Nichteintreten und Bestehen der Selbstsperrung geltenden Bedingungen und Kriterien zu studieren, wird im folgenden ein typischer Fall[1]) ausführlich behandelt, der die Erscheinung nach beiden Seiten hin gut erkennen läßt. Um über Zuverlässigkeit und Geltungsbereich dieser Bedingungen und Kriterien für die Selbstsperrung einen Aufschluß zu erhalten, sowie zur Anbahnung von Versuchen, den Kriterien allgemeinere Ausdrucksweisen zu geben, ist eine solche Behandlung typischer Fälle nötig; durch die vielfache Anwendbarkeit auf Fälle der Wirklichkeit dürfte sie auch sonst nützlich sein.

Beschreibung des Systems.

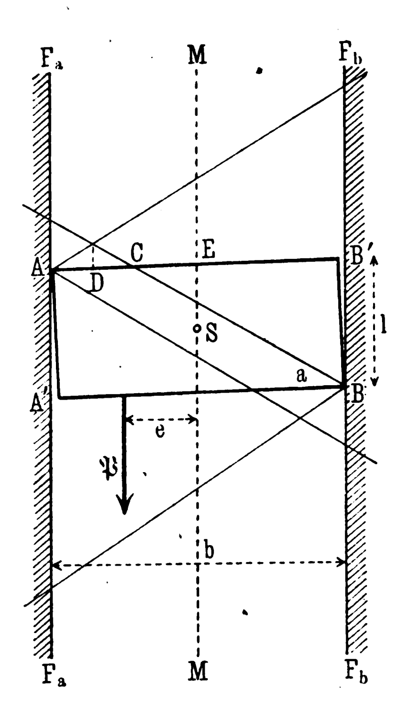
$F_a - F_a$ und $F_b - F_b$ seien die beiden Führungen und die parallele Gerade $M - M$ zwischen ihnen, die Mittelachse, werde zur Y-Achse gewählt, ihre positive Seite zeige nach „unten“; die positive X-Achse gehe nach „links“ von einem beliebigen Punkte der Mittelachse aus. Der Abstand b der Ecken A und B' voneinander gibt die „Breite“, die Strecke l die „Länge“ der „Schublade“ $AA'BB'$. Ihr Schwerpunkt S kann sich auf der Mittelachse „aufwärts“ und „abwärts“ bewegen. Es werden nur solche

---

[1]) Diesen bzw. ganz äquivalente Fälle siehe z. B. bei J. H. Jellett, Die Theorie der Reibung, deutsch von Lüroth u. Schepp, Leipzig 1890, S. 186; A. Ritter, Lehrbuch der technischen Mechanik, 8. Aufl., Leipzig 1900, S. 311; A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik I, 5. Aufl., Leipzig und Berlin 1917, S. 242; Hamel, l. c., S. 217; E. Autenrieth, Technische Mechanik, 2. Aufl., Berlin 1914, S. 116. — Ich muß es mir aus Rücksichten des Raumes versagen, auf diese Behandlungen des gewählten Beispieles und die Übereinstimmungen bzw. Abweichungen gegen die hier gegebene Darstellung näher einzugehen.



Lagen der Lade betrachtet, bei welchen eine allfällige Berührung zwischen Lade und Führungen bei A und B stattfindet. An der ausbalanciert („gewichtslos“) gedachten Lade greife eine stets abwärts gerichtete Kraft $\mathfrak{P}$ vom Betrage P an und zwar in einer Entfernung (Exzentrizität) e von der Mittelachse. Die Führungen sind mit Reibung versehen und zwar seien die Reibungszahlen der linken Führung f_a für die Ruhe und f_a' für die Bewegung, die entsprechenden der rechten Führung seien f_b und f_b'[1]). Je nach dem Verhältnis ihrer Länge zur Breite heiße die Lade eine „lange“, wenn $b < l/f'$ (wobei jetzt Symmetrie der Reibungsverhältnisse angenommen ist, d. i. $f_a = f_b = f$ und $f_a' = f_b' = f'$); sie heiße eine „kurze“, wenn $b > l/f'$, und der Fall $b = l/f'$ bildet den „Mittelfall“ zwischen den beiden Typen. Konstruiert man die Reibungswinkel bei A und B (und zwar die für Bewegung) und bezeichnet die Öffnung jeder halben Reibungswinkelfläche mit α', so ist $f' = tg\,\alpha'$; l/f' stellt dann dasjenige Stück vor, welches z. B. der obere Schenkel des Reibungswinkels bei B auf dem Halbstrahle $B'A$ abschneidet, also $B'C$. Im Falle der langen Lade liegt C links von A, im Mittelfalle in A, im Falle der kurzen Lade (wie sie die Figur zeigt) rechts von A innerhalb der Führungen. Mit abnehmender Länge der Lade (bei festgehaltener Breite) rückt C näher an die Mitte der oberen Ladenkante (d. i. an E) und wenn b den Wert $2\,l/f'$ übersteigt, rechts von E weiter, bis im Grenzfalle $l:b = 0$ C mit B' zusammenfällt. Der Mittelpunkt des



[1]) Mit einem Strich ′ versehene Größen beziehen sich stets auf das bewegte System; Größen mit den Zeigern a bzw. b auf die linke bzw. rechte Führung.

Stückes CA werde mit D bezeichnet, er läuft bei Veränderung des Verhältnisses $l:b$ entsprechend mit C mit, insbesondere fällt er für $b = l/f'$ mit A (und C), für $l:b = 0$ mit E zusammen.

Aufstellung der Gleichungen für die Bewegung und die Ruhe des Systems.

Es sollen nun die dynamischen bzw. die statischen Gleichungen des Systems in allgemeinster Weise aufgestellt werden, so daß sich aus ihnen durch Einführung gewisser Annahmen und Besonderheiten alle Fälle ergeben.

Diese Gleichungen werden durch Anwendung des Satzes gewonnen, daß Bewegung und Ruhe eines starren, von in einer Ebene verteilten Kräften angegriffenen Körpers durch die resultierenden Kräfte nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen und das resultierende Drehmoment in bezug auf einen beliebigen Punkt bestimmt werden[1]). Wählt man im vorliegenden Falle die X- und die Y-Richtung und den Schwerpunkt als Bezugsstücke und bezeichnet die nach der Mittelachse zu gerichteten Normalkomponenten der in den Punkten A und B auftretenden Widerstände der Führungen mit N_a und N_b, so erhält man für die Bewegung die drei Gleichungen

$$\text{I}')\quad N_a - N_b = -m x_s''$$

$$\text{II}')\quad P' - f_a N_a - f_b N_b = m y_s''$$

$$\text{III}')\quad P' . e' - N_a . l/2 - N_b . l/2 - f_a N_a . b/2 + f_b N_b . b/2 = K_s . \omega_s''$$

wobei m die Masse der Lade, K_s ihr Trägheitsmoment um den Schwerpunkt (für Bewegung in der xy-Ebene), x_s und y_s die Koordinaten des Schwerpunktes und ω_s den Winkel zwischen einer in der Lade festen Mittelachse und der der Führungen bedeutet.

Für die Ruhe lauten die entsprechenden Gleichungen:

$$\text{I})\quad N_a - N_b = 0$$

$$\text{II})\quad P + k_a f_a N_a + k_b f_b N_b = 0$$

$$\text{III})\quad P . e - N_a . l/2 - N_b . l/2 + k_a f_a N_a . b/2 - k_b f_b N_b . b/2 = 0$$

wobei die echten Brüche k_a und k_b angeben, welcher Teil des zulässigen Maximums $f . N$ der Reibungskraft jeweils wirklich in Erscheinung tritt, und zwar wenn $k > 0$ abwärts, wenn $k < 0$

---

[1]) Siehe etwa W. Keck, Vorträge über Mechanik I, 4. Aufl., Hannover 1913, S. 177 ff.

aufwärts gerichtet; die k gehen sohin von -1 bis $+1$, ihre Summe darf jedoch (wie aus Gl. II ersichtlich) nicht positiv werden[1]).

Die Bedingungen für Eintreten und Bestehen der Selbstsperrung.

Was das Eintreten der Selbstsperrung, d. i. die mehr oder minder plötzliche Hemmung einer bestehenden Bewegung betrifft, so soll hier nur eine notwendige Bedingung dafür (d. i. in ihrer Umkehrung zugleich eine hinreichende Bedingung für das Nichteintreten) angegeben werden. Rechnet man unter Annahme des Bestehens einer reinen Parallelbewegung nach abwärts den Wert $N_a = N_b \equiv N$ (wegen $x'' = 0$) aus Gl. III′ (die für diese Annahme rechts den Wert 0 erhält) und denkt sich ihn in Gl. II′ eingesetzt, so sieht man sofort, daß Werte $e' > \frac{l - (f'_b - f'_a) \cdot b/2}{f'_b + f'_a}$ und nur solche eine negative Beschleunigung $-y''$ zur Folge haben; dies ist aber notwendig, damit die abwärts gerichtete Bewegung zum Stillstande kommt. Ist aber $e' \leqq$ dem obigen Werte, so bleibt eine solche Bewegung erhalten bzw. wird verstärkt. Die Bedingung für das tadellose Funktionieren, genauer gesagt Weiterfunktionieren der Schublade ist also die letztere Ungleichung, die für den Fall symmetrischer Reibungsverhältnisse ($f'_a = f'_b \equiv f'$) die einfache Form $e' \leqq \frac{1}{2}\, l/f'$ annimmt. $\frac{1}{2}\, l/f'$ ist aber die Länge der Strecke ED, da $ED = EA - DA = \frac{1}{2}\, B'A - \frac{1}{2}\, CA = \frac{1}{2}\,(B'A - CA) = \frac{1}{2}\, B'C$ ist und $B'C$ die Länge l/f' hat. Die graphische Bedingung für tadelloses Weiterfunktionieren einer bewegten Schublade ist also die, daß die Linie der bewegenden Kraft rechts vom Punkte D vorbei oder durch D hindurch gehe[2]). Der „kritische“ Punkt ist hier der Schnittpunkt der oberen Begrenzungslinien der beiden Reibungswinkel.

Wesentlich schwieriger ist die Herstellung der Bedingungen für das Vorhandensein von Selbstsperrung im Falle des ruhenden

---

[1]) Diese Einführung der Koeffizienten k_a und k_b gestattet es, auch die für die Ruhe geltenden Sätze (rein formal) als Gleichungen anzuschreiben, was recht übersichtlich ist. Vgl. eine Andeutung bei A. Gray, Lehrbuch der Physik I, Deutsche Ausgabe, Braunschweig 1904, S. 237.

[2]) Diese Bedingung siehe z. B. bei Ritter, l. c., S. 311, Jellett, l. c., S. 186 ff. u. a. m.

Systems. Hier handelt es sich um die Bedingung dafür, daß das System, wenn es in Ruhe befindlich ist, unter der Einwirkung der Kraft $\mathfrak{P}$ auch in Ruhe bleibt. Man kann analog wie im Falle der Bewegung vorgehen und den Normaldruck N der Führungen aus den Gl. II und III berechnen bzw. eliminieren. Nach II ist

$$N = -\frac{P}{k_b f_b + k_a f_a};$$

das Resultat der Elimination ist

$$e = -\frac{l + (k_b f_b - k_a f_a) \,.\, b/2}{k_b f_b + k_a f_a}.$$

Die beiden Formeln geben einen Zusammenhang zwischen N und P einerseits und einen Wert für die Exzentrizität e andererseits für jedes Paar von Werten k_a und k_b, wenn P und die Reibungszahlen f_a und f_b vorgegeben sind. Sie lassen erkennen, daß eine eindeutige Bestimmung der Koeffizienten k_a und k_b auf Grund der im einzelnen Falle vorgegebenen Werte P, e und f_a, f_b allein (ohne Vorgabe des N) nicht möglich ist, wie ja von vornherein zu erwarten ist[1]. Durch Einschränkung der Koeffizienten k_a und k_b auf gewisse Bereiche lassen sich jedoch auch für N und e gewisse Grenzen finden. Aus der Definition der Koeffizienten k_a und k_b, sowie aus der Forderung, daß N keine negativen Werte annehmen dürfe (um stets eine Druckkraft darzustellen), ergibt sich schon als weiteste Grenze des Bereiches (k_a, k_b)

$$|k_a| \leqq 1, \quad |k_b| \leqq 1, \quad k_a + k_b \leqq 0.$$

Im folgenden wird zur Vereinfachung Symmetrie der Reibungsverhältnisse in bezug auf die Mittelachse vorausgesetzt, d. h. $f_a = f_b \equiv f$.

Sowohl nach Analogie des Falles der Bewegung als auch nach der Erfahrung kann man schon von vornherein erwarten, daß, falls die Ruhe des Systems bei einer bestimmten, durch einen bestimmten Wert $\bar{e}$ bezeichneten Lage der treibenden Kraft erhalten bleibt, dies um so mehr für alle Lagen $e > \bar{e}$ der Fall sein wird, weil ja in diesen Fällen die Wirkung der treibenden Kraft eine Vergrößerung um ein die Verklemmung verstärkendes Moment erfährt. Diese Überlegung führt auf die Frage nach den kleinsten Werten von e (die negativen Werte eingeschlossen) im

---

[1]) Vgl. z. B. Keck, l. c., S. 248.

ganzen betrachteten Bereiche der k_a und k_b. Man kann sich überzeugen, daß für jeden beliebigen, dann festgehaltenen Wert von k_a der Wert von e für $k_b = -1$ am kleinsten wird, daher wird auch der kleinste e-Wert des ganzen Bereiches für $k_b = -1$ zustandekommen. Für die Betrachtung des Verlaufes der e-Werte für $k_b = -1$ aber empfiehlt sich die Spaltung nach den S. 170 u. 171 genannten Typen (nun mit Verwendung des statischen Reibungskoeffizienten f): Für die lange Lade ($b < l/f$) ist der Wert $\frac{1}{2}l/f$ für $k_b = -1$ der kleinste, mit steigendem k_a nehmen die Werte bis $+\infty$ zu[1]); für den Mittelfall ($b = l/f$) stimmen alle Werte mit dem ersten überein, auch der für $k_a = +1$ ergibt $0/0 = \frac{1}{2}l/f$; nur für die kurze Lade nehmen die Werte mit steigendem k_a ab und zwar über Null bis $-\infty$. Es ergibt sich also für die lange Lade einschließlich des Mittelfalles das analoge Resultat wie für die Bewegung und es bleiben nur die Verhältnisse der kurzen Lade[2]) zu betrachten übrig.

Für die kurze Lade wäre nun, wenn man es bei der bisherigen Beschränkung des Bereiches (k_a, k_b) bewenden läßt, jeder Wert des e möglich, d. h. die kurze Lade müßte unter der Einwirkung jeder parallel zur Mittelachse in welchem Abstande e immer angreifenden Kraft in Ruhe bleiben. In der Tat lassen sich sowohl auf dem rechnerischen wie auf dem zeichnerischen Wege für jedes vorgegebene e die Gl. I bis III bzw. ihre graphischen Äquivalente erfüllen. Man wird aber bei der Ausführung solcher Bestimmungen sofort sehen, daß die Forderung des Bestehenbleibens der Ruhe unter Umständen ein Anwachsen der von den Führungen zu leistenden Normaldrücke auf sehr große Beträge, schließlich über jede Schranke hinaus verlangt[3]); dies wird dann der Fall sein, wenn die Linie der treibenden Kraft sich mehr und mehr von einer gewissen Zone links von der Mittelachse nach rechts hin entfernt. Die gleiche Erscheinung für Lagen weit links von der Mittelachse hat nichts Befremdliches, da Kräfte in solchen Lagen im Falle der Bewegung negative Beschleunigungen hervorzurufen geeignet sind. Auch solange die Kraft noch überhaupt links von der Mittelachse angreift, hat es

---

[1]) Zu diesem Typus gehören die bei Ritter, l. c., § 77 u. 78, Hamel l. c., S. 217, Keck, l. c., S. 247 f. u. Föppl, l. c., § 37, behandelten Fälle.

[2]) Dieser Typus bei Ritter, l. c., § 79, u. Jellett, l. c., S. 186.

[3]) Ritter, l. c., S. 306.

wenigstens nichts Paradoxes, daß sie die Ruhe ungestört lassen solle; wenn die Kraft aber rechts von der Mitte angreift, so ist ein solches Ergebnis durchaus befremdlich, da sie dann ja doch ein Drehmoment ausübt, welches in bezug auf den Schwerpunkt als Drehpunkt immer geeignet wäre, eine Verklemmung bei A und B zu lösen, und falls die Kraft außerhalb der rechten Führung liegt, sogar in bezug auf jeden Punkt der Lade als Drehpunkt. Die Erklärung dieser scheinbaren Paradoxie geschieht durch die Einbeziehung der Wirkung eben jener sehr großen Druckkräfte, die auch sehr große Reibungswiderstände ermöglichen. Diejenigen Fälle, in denen so große Drucke zu stande kommen bzw. von außen angebracht werden müssen[1]), um die erwähnten auffallenden Gleichgewichtslagen zu ermöglichen, haben aber nicht eine derartige Bedeutung wie jene, bei welchen solche Drucke nicht zur Verfügung stehen, die zuweilen auch als „sich selbst überlassene Systeme" bezeichnet werden[2]). Es liegt daher nahe, zu versuchen, zunächst durch entsprechende weitere Einschränkungen des Bereiches (k_a, k_b) rein formal Beschränkungen für N sowohl als auch für e herzustellen und dann umgekehrt zu zeigen, daß solchen Beschränkungen auch eine reale Bedeutung zukommt, etwa daß sie die Entstehung der betrachteten Lage aus sehr langsamen Bewegungen voraussetzen, daß die Lade „nicht von vornherein verklemmt" sei usw.

Man könnte z. B. folgende Einschränkung einführen: Wenn man die Werte von N im ganzen bisher abgegrenzten Bereich (k_a, k_b) überblickt, wie sie sich aus Gl. II ergeben, so sieht man, daß eine Beschränkung $|k_a + k_b| \leqq 1$ oder mit Berücksichtigung des Zeichens $k_a + k_b \leqq -1$ die Einschränkung $N \leqq P/f$ zur Folge hätte (und umgekehrt). Diese neue Abgrenzung des Bereiches (k_a, k_b), welcher nun durch $-1 \leqq k_a \leqq 0$ und $-1 \leqq k_b \leqq 0$ samt der vorhergehenden Ungleichung definiert wäre, wäre einer sehr einfachen geometrischen Deutung fähig[3]) und könnte in der Tat eine große Zahl von wirklichen Fällen gut wiedergeben. Auch

---

[1]) Ritter, l. c., S. 306; Keck, l. c., S. 251.

[2]) Ritter, l. c., S. 308.

[3]) Es wäre die, daß für den Schnittpunkt der treibenden Kraft mit den beiden Gesamtwiderständen in A und B das den beiden oberen Hälften der Reibungswinkel gemeinsame Flächenstück in Betracht käme, wodurch der kritische Punkt nach C rücken würde.

ließe sich diese Beschränkung durch manche Argumente plausibel machen, z. B. in der Form $f \cdot N \leqq P$, daß es ausgeschlossen sein solle, daß (ausgenommen den Fall $f = 0$) durch die vorhin angedeutete sehr langsame Bewegung unter alleinigem Einfluß der treibenden Kraft von einer freien Lage aus in der Richtung dieser Kraft größere Kräfte entstehen, als die treibende Kraft selbst[1]); eine ähnliche Überlegung ließe sich für die Drehmomente anstellen; auch die von manchen Autoren gebrauchte Behauptung, die Reibungswiderstände haben die den „beabsichtigten"[2]) oder den „im reibungslosen Falle eintretenden"[3]) Bewegungen entgegengesetzte Richtung, würde zum Ausschlusse der positiven k_a und k_b führen.

Eine einwandfreie Erledigung ist jedoch nur auf Grund der Betrachtung des Vorganges möglich, durch welchen eine solche Ruhelage entsteht[4]). — Wenn auf die freie Lade, wie sie anfangs ohne Berührung zwischen den Führungen liegend angenommen werden soll, nur eine Kraft P' parallel zur Mittelachse im Abstande e' von derselben nach unten hin einwirkt, so erfolgt eine Bewegung der Lade, die zusammengesetzt ist aus einer Verschiebung des Schwerpunktes in der Richtung nach unten und einer Drehung um den Schwerpunkt, deren Sinn durch das Zeichen von e' gegeben ist. Wenn der zur Verfügung stehende Spielraum d. h. die Differenz zwischen dem Abstande der Führungen und der Breite der Lade sehr klein ist, wird schon nach sehr kurzer Zeit, also bei endlicher Kraft mit sehr kleiner Geschwindigkeit Berührung in A und B eintreten[5]). Von da ab erfolgt entweder eine reine Parallelbewegung oder aber Stillstand. Es wurde

---

[1]) Vgl. A. Schau, Statik I, S. 78. Leipzig u. Berlin 1911.

[2]) Z. B. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper. I. Deutsche Ausgabe. Leipzig 1898. S. 142; A. Wernicke, Lehrbuch der Mechanik I, 4. Aufl., S. 528, Braunschweig 1900; H. B. Lübsen, Lehrbuch der Mechanik, 5. Aufl., S. 424, Leipzig 1905; C. J. Kriemler, Technische Mechanik, S. 77. Stuttgart 1915.

[3]) Z. B. Föppl, l. c., S. 229, Ritter, l. c., S. 276, W. Voigt, Elementare Mechanik, 1. Aufl., S. 74. Leipzig 1889.

[4]) Analog wie etwa bei Ritter, l. c., S. 309; siehe auch R. v. Mises, l. c., S. 193.

[5]) Es wäre auch nicht von der Hand zu weisen, daß die Berührung in einem der beiden Punkte früher stattfindet als im anderen; die Betrachtung dieser Möglichkeit gehört aber zur Behandlung des Problems mit nichtsymmetrischen Verhältnissen der Führungen, auf die hier der Kürze halber nicht eingegangen werden kann.

bereits (S. 173) gezeigt, welches die notwendige Bedingung für das Eintreten des Stillstandes ist: $e' < \frac{1}{2}\, l/f'$; diese Bedingung ist bei den jetzt gemachten Voraussetzungen auch hinreichend; man kann hier aber auch den Grenzwert $e' = \frac{1}{2}\, l/f'$ selbst verwenden, wenn man annimmt, daß die unter diesen Umständen erfolgende beschleunigungsfreie sehr langsame Bewegung (während derer $N = P'/2f'$ ist) durch einen sehr kleinen Impuls in der der Bewegung entgegengesetzten Richtung zum Stillstand gebracht wird, wobei keine anderen als sehr kleine lebendige Kräfte zu vernichten wären [1]).

Im Augenblick des Stillstandes aber lauten die drei Gleichungen:

$$\text{I)}\ N_a = N_b = P'/2f'$$
$$\text{II)}\ P' + k_a f \,.\, P'/2f' + k_b f \,.\, P'/2f' = 0, \quad \text{daraus } k_a + k_b = -2f'/f$$
$$\text{III)}\ P' \,.\, e' - P'/2f' \,.\, l - (k_b - k_a) f \,.\, P'/2f' \,.\, b/2 = 0, \quad \text{daraus } k_b - k_a = 0$$

Das heißt, in der erreichten Ruhelage herrscht (beim Normaldruck $N = P'/2f'$) Gleichgewicht und k_a und k_b sind bestimmt [2]).

Nun erhebt sich die Frage, welche Veränderungen in der Lage der treibenden Kraft in diesem Zustande des Systems zulässig sind, ohne daß die Ruhe gestört wird. Eine Verschiebung der Kraft nach links braucht nicht betrachtet zu werden, da dann a fortiori die Ruhe erhalten bleibt. Also handelt es sich nur um eine Verlegung ihrer Linie nach rechts. Zu diesem Ende muß man nachsehen, ob die drei Gleichungen auch noch kleinere Werte von e zulassen als den $e = e'$. Dabei kommt es darauf an, wie sich die Drucke N bei einer solchen Verschiebung, die auch durch Hinzufügung eines entsprechenden Kräftepaares zur treibenden Kraft ersetzt werden kann, verhalten. Von allen Möglichkeiten sollen die zwei sozusagen extremsten Fälle behandelt werden.

1. Der Normaldruck wird durch die auch im Falle der Verschiebung der treibenden Kraft bestehen bleibende Beziehung $P \,.\, e = N \,.\, l$ angegeben; dann muß nach Gl. III die Differenz

---

[1]) Die bei Ritter, l. c., S. 309 unten u. f. beschriebene Erscheinung tritt also nicht ein.

[2]) Die Exzentrizität e' ist die bei Jellett, l. c., S. 188 oben angegebene Grenze zwischen notwendigem und möglichem Gleichgewicht.

$k_b - k_a$ stets Null bleiben; Gl. II läßt aber eine Verkleinerung des N nur bis zu dem Grade zu, daß die nunmehrigen Maxima der Reibungskräfte $f.N$ (statt wie früher $f'.N$) zur Wirkung kommen; d. h. e darf gegen e' bis zum Ausmaße f'/f verkleinert werden, d. h. $e \geqq e' \frac{f'}{f}$ oder $l/2f$.

2. Die Normaldrucke bleiben von der Verschiebung der treibenden Kraft unberührt. Dann sieht man aus Gl. III, daß Verschiebungen der Kraft nach rechts, d. h. Verkleinerung von e durch die Wahl negativer Werte $(k_b - k_a)$ ermöglicht werden können, wobei $k_b + k_a$ immer unverändert den Wert $-2f'/f$ beibehalten muß; der algebraische kleinste mit diesem Werte für die Summe verträgliche Wert der Differenz ist aber $k_b - k_a \geqq 2f'/f - 2$, d. h. $k_b = -1$, $k_a = 1 - 2f'/f$ und daraus ergibt sich als äußerste Lage die durch $e \geqq l/2f' - b/2 \,.\, (f/f' - 1)$ bestimmte.

Damit ist die Wirkung der Annahme einer aus sehr langsamer beschleunigungsfreier Bewegung entstandener „nicht von vornherein verklemmten“ Lage beschrieben; es soll noch gezeigt werden, wie sich diese Verhältnisse in der Wirklichkeit gestalten werden, wenn die hier gemachten Abstraktionen nicht genau erfüllt sind.

Wenn die Bewegung, aus der die verklemmte Lage entsteht, nicht unendlich langsam ist (und dies wird in Wirklichkeit immer der Fall sein und in um so höherem Maße, je größer der Spielraum zwischen Lade und Führungen ist), so müßte im Augenblicke des Stillstandes eine endliche lebendige Kraft vernichtet werden. Unter der Annahme vollkommener Starrheit würde dies zu einer „unendlich starken“ Verklemmung führen[1]; da aber auch diese Annahme in Wirklichkeit nicht erfüllt ist, so wird auch die Verklemmung durch eine über die Berührung hinausgehende Verdrehung mit endlichen Druckkräften in einer von Null verschiedenen Zeit zu stande kommen und diese Druckkräfte werden so lange unverändert bestehen bleiben, als die eben erwähnte Verdrehung besteht; sie werden aber größer sein als in dem hier (unter 2.) behandelten Grenzfalle. Dadurch werden aber die Verhältnisse für Selbstsperrung günstiger, so daß die hier bestimmten Bedingungen als die des ungünstigsten Falles angesprochen werden können.

[1]) Ritter, l. c., S. 309 unten u. f.

Einige Bemerkungen über Vokalsynthesen;
von Karl v. Wesendonk.

(Eingegangen am 3. August 1918.)

Herr C. STUMPF tut in seiner bemerkenswerten, in den Berliner Akademieberichten für 1918, S. 333 bis 358 erschienenen Arbeit über „Die Struktur der Vokale“ auch meiner Mitteilung[1]) über die MILLERschen Vokalsynthesen Erwähnung. Aus diesen gehe hervor, daß MILLER gleichfalls die Synthese der Vokale mit 32 Pfeifen bewerkstelligt habe und zu wesentlich übereinstimmenden Ergebnissen, vor allem zu einer Bestätigung der HELMHOLTZschen Vokaltheorie, gekommen sei. „Da die beiden Untersuchungen vollkommen unabhängig voneinander geführt wurden, ist diese Bestätigung gewiß von starkem Gewicht. Als einen wesentlichen Unterschied betrachte ich es, daß MILLER nicht mit vollkommen einfachen Tönen operierte, da Pfeifen immer noch mehrere Teiltöne, gedackte den dritten sogar sehr stark enthalten. Gerade der Rückgang auf absolut einfache Töne ist aber in dieser Sache von prinzipieller Wichtigkeit, da die Schlußfolgerungen erst dann vollkommen eindeutig werden.“ (L. c., S. 345, Anm. 1.)

Diese Angaben scheinen mir nicht ohne weiteres angenommen werden zu sollen. Absolut einfache Töne im strengen Sinne sind wohl kaum herstellbar, sondern nur praktisch einfache Töne. In Wirklichkeit hat man es ja stets mit Schwingungen von endlicher Amplitude zu tun.

MILLER[2]) bemerkt über die zur Vokalsynthese verwendeten Orgelpfeifen (l. c., S. 247) folgendes: „Die geeignetsten Pfeifen sind verschlossene Pfeifen aus Holz, bekannt als „Tibia“-Pfeifen; diese besitzen einen großen Querschnitt im Vergleich zur Länge, haben einen engen Mund und sind für einen niederen Winddruck

---

[1]) Berichte der Deutschen Physikalischen Gesellschaft vom 30. Juni 1917, S. 95 bis 108. Auch meine Versuche über Vokalsynthese werden angeführt, l. c., S. 344.

[2]) L. c. bezieht sich bei Angaben MILLERs auf dessen Buch: The science of musical sound. Newyork 1916 (Macmillan).

abgestimmt. Die Pfeifen haben bleierne Füße (toes), deren Öffnungen größer oder kleiner gemacht werden können und sich so der Menge (Druck) der Luft anpassen, welche in die Pfeifen eintritt. Diese Anpassung in Verbindung mit derjenigen der Lippe und des Halses erlauben jede Tonstärke zu erhalten, von dem geringsten bis zu dem vollen Klange. Jede Änderung in der Tonstärke verursacht eine Änderung in der Tonhöhe, welche kompensiert werden muß durch Einstellung des Verschlußstempels. Viele Analysen zeigen, daß die Klänge von solchen Pfeifen zu 99 Proz. aus dem Grundtone bestehen, d. h. der Ton ist praktisch ein einfacher."

Man hat, wie mir scheint, keinen Grund, an der Richtigkeit dieser Angabe zu zweifeln, zumal MILLER wohlbekannt ist, daß Orgelpfeifen Klänge mit sehr merklichen Obertönen liefern können. In l. c., Fig. 96, S. 199, ist die Schwingungskurve einer Orgelpfeife mit dem Grundtone $C_3 = 259$[1]) gegeben, welche sofort den zusammengesetzten Charakter des betreffenden Klanges offenbart. 12 einfache Töne werden als dessen Komponenten nachgewiesen (l. c., Fig. 98, S. 125) und aufgezeichnet. Das Diagramm für diesen Pfeifenklang mit den Intensitätsverhältnissen der betreffenden Komponenten ist (l. c., Fig. 129, S. 169) dargestellt, der dritte und vierte Partialton sind die lautesten, die anderen, auch den Grundton erheblich überragend. Ebenso werden die Obertöne bei verschiedenen anderen Musikinstrumenten sehr bestimmt und deutlich nachgewiesen. Für die Stimmgabel zeigt aber das Diagramm, Fig. 130, S. 171, einen durchaus einfachen Ton an. Dabei ist MILLER wohlbekannt, daß Stimmgabeln auch Obertöne liefern können. L. c., S. 188 und Fig. 137 betreffen die Klangkurve einer Stimmgabel, welche durch starkes Streichen mit einem Bogen zum Tönen gebracht worden, und die, wie man gleich sieht, durchaus keine einfache Sinusbewegung darstellt. In l. c., Fig. 136, S. 187, ist ferner die komplizierte Klangkurve einer angeschlagenen Stimmgabel wiedergegeben, während Fig. 135 dem Klange einer Stimmgabel entspricht, der nur aus einem einfachen Tone besteht. Auch bei Flötenklängen fand MILLER neben solchen mit mehreren zum Teil recht merklichen Obertönen, andere, welche praktisch nur einen einfachen Ton repräsen-

[1]) D. h. 259 Doppelschwingungen in der Sekunde.

tierten (l. c., S. 192 bis 194 und Fig. 140). Diese Angaben scheinen mir in guter Übereinstimmung mit den Angaben anderer Akustiker zu sein, welche ebenfalls das Vorhandensein praktisch einfacher Tonquellen konstatierten. Allerdings bei starker Erregung einer solchen (großer Schwingungsamplitude) ist das Hinzutreten weiterer Töne zu dem praktisch einfachen Tone [1]) zu befürchten. Darauf hat Verf. bereits bei einer früheren Gelegenheit hingewiesen [2]). Aber wenn man solche Fehlerquellen vermeidet, dann sind Klangsynthesen wie die von MILLER und auch diejenigen Verf. als einwandfrei anzusehen, und bedarf man keineswegs der komplizierten Einrichtungen von STUMPF, um recht brauchbare Resultate zu erhalten.

Es sei mir noch gestattet, auf einen anscheinend vorhandenen Widerspruch in den Angaben von STUMPF, betreffend den Formanten des Vokales O, hinzuweisen. S. 336, l. c., heißt es: „Das Maximum für O liegt in beiden Fällen [3]) bei c^2; doch beginnt es für den Grundton c bereits bei g^1, welcher Ton im c^1-Klange nicht enthalten ist.“ Demgegenüber wird dann aber S. 351 als Hauptformant des O der Ton g^1 gegeben, und S. 349 in der Tabelle für c erscheint g^1 als stärkster Partialton des Vokales O. Die erstere Angabe stimmt aber viel besser zu den Ergebnissen von HELMHOLTZ, MILLER und Verf. g^1 ist entschieden zu tief gelegen für das Verstärkungsmaximum beim O.

Der so interessanten Methode von GUTZMANN, die Vokale künstlich hervorzurufen, wird von STUMPF leider nicht Erwähnung getan. Zu S. 344 sei mir die Bemerkung gestattet, daß meines Wissens auch nach der HERMANNschen Vokaltheorie nur zum Grundton harmonische Teiltöne auftreten.

---

[1]) Auch GRASSMANN, der doch bei den Vokalen so zahlreiche Obertöne bemerken konnte, sieht die Töne angeblasener bauchiger Flaschen als einfache an.

[2]) Über HELMHOLTZ' Lehre von Dissonanz und Konsonanz. Naturw. Rundsch. 1910.

[3]) Nämlich, wenn der Vokal auf c und c^1 gesungen wurde.

Über die Verwendung von Radium-Leuchtmassen zur Lichtsinnprüfung;
von P. Metzner.

(Eingegangen am 11. September 1918.)

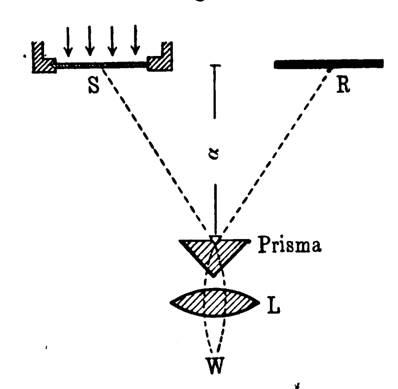
Infolge der nächtlichen Lebens- und Kampfesweise unserer Truppen und der hohen Ansprüche an das Sehen und Beobachten bei stark herabgesetzter Beleuchtung haben die Methoden der Lichtsinnprüfung an Bedeutung gewonnen. Besonders wichtig ist es, die Berechtigung der Angaben von Leuten, die über unverhältnismäßig schlechtes Sehen bei Nacht, ja schon bei Dämmerung klagen, mit einfach zu handhabenden und geringe Anforderungen an die Intelligenz stellenden Proben nachzuprüfen. Der bei Nacht allein arbeitende Stäbchenapparat der Netzhaut erreicht seine höchste Empfindlichkeit nach 30 bis 40 Minuten langem Dunkelaufenthalt; ein normales Auge erkennt in 50 cm Abstand vom Auge dann schon Helligkeiten, die einer Beleuchtungsstärke von etwa $^1/_{40000}$ Lux entsprechen, von einzelnen werden sogar Werte von $^1/_{250000}$ Lux erreicht. Zur Messung derartig geringer Helligkeiten ist eine ganze Anzahl von „Adaptometern" angegeben worden, die zahlenmäßig die geringste, eben noch zur Wahrnehmung gelangende Helligkeit in Meterkerzen anzugeben gestatten (am bekanntesten die Adaptometer von NAGEL, PIPER, neuerdings ein von Prof. K. STARGARDT, Bonn, angegebenes, behelfsmäßig herstellbares „vereinfachtes Adaptometer" [1]), das ebenso exakte Messungen erlaubt, und mit dem wir auch einen großen Teil unserer Messungen ausführten). Diese Adaptometer haben neben ihrer Größe den Nachteil, elektrischen Strom mit annähernd konstanter Energie vorauszusetzen. Speziell für die Verwendung in vorgeschobenen Augenstationen ist eine Anzahl kleiner Instrumente angegeben worden, die zum Teil als Lichtquellen Radiumleuchtmassen benutzen (Braunschweig, Best) in der Annahme, darin annähernd konstante Lichtquellen zu besitzen. Unter

---

[1]) ZS. f. Augenheilkunde 1918.

Berücksichtigung der Forderung, immer gleich große Netzhautbezirke mit verschiedenen, zahlenmäßig genau bekannten Helligkeiten zu prüfen, ist von STARGARDT ein „Radiumadaptometer“ [1]) konstruiert worden, bei dem ebenfalls ein Radiumpräparat Verwendung findet, dessen Helligkeit durch vorgeschaltete Papierblätter abgeschwächt werden kann.

Sowohl die Helligkeit des Präparates selbst als auch die Helligkeit hinter den einzelnen Papierblenden wurden von Prof. STARGARDT und mir mit Hilfe einer Normallampe und des oben erwähnten vereinfachten Adaptometers bestimmt. Um mit den im Felde verfügbaren Mitteln wegen der Schwierigkeit des Vergleichs derartig geringer Helligkeiten (nicht über $^{1}/_{120}$ Lux) möglichste Genauigkeit zu erzielen, wurde eine Art behelfsmäßiges Photometer konstruiert mit Hilfe eines kleinen rechtwinkeligen Prismas (vgl. Figur). *S* ist die von hinten erleuchtete Milchglasscheibe des vereinfachten Adaptometers [2]), *R* die zu messende Leuchtfläche oder eine von der Normallampe erleuchtete Gipsplatte. Der Strahlengang ist völlig symmetrisch. Die Prismenkante wird mit der Lupe *L* scharf eingestellt; die Entfernungen von



S und *R* sowie der Abstand *a* sind so gewählt, daß im Prisma nur eine feine Trennungslinie zu sehen ist. Die Abdunkelung des Beobachters gegen die Normallampe, die nur ein durch Blenden begrenztes Lichtbündel auf *R* werfen konnte, geschah durch dunkle Tücher. Die Messungen wurden durchweg mit gut ausgeruhten Augen ausgeführt (mindestens 45 Minuten Dunkelaufenthalt).

Als Leuchtmasse wurde die Nr. 0, Qual. I der Gesellschaft für Verwertung radioaktiver Produkte verwendet, deren Konstanz durch frühere Beobachtungen bekannt war. Unsere Präparate

[1]) Münchener med. Wochenschr. 1918, S. 909.

[2]) Die Helligkeit dieser Scheibe kann durch die vor der Lichtquelle angebrachten Blenden kontinuierlich in genau meßbarer Weise verändert werden. Das Adaptometer selbst wurde mit der Normallampe geeicht.

hatten eine Flächenhelligkeit entsprechend einer Beleuchtungsstärke von rund $^1/_{120}$ Lux ($^1/_{121}$ bis $^1/_{125}$ Lux). Das Licht enthält in der Hauptsache grüne bis blaue Strahlen. Zur Abschwächung wurde ein geleimtes dünnes Schreibpapier von Soennecken mit hinreichend homogener Beschaffenheit gewählt, dessen Absorptionsminimum eben in dem Bereich des von den Leuchtschirmen ausgesandten Lichtes lag. Der Absorptionskoeffizient für das gelbliche Licht der Normallampe betrug $\alpha = 0{,}82$, für das grünliche Licht der Radiumpräparate aber nur $\alpha = 0{,}483$. Die Berechnung der mit Hilfe der Papierblenden erzielten Helligkeiten mit Hilfe der Absorptionskoeffizienten und die direkte Messung mittels des Adaptometers (einigermaßen einwandfrei nur möglich bis zu $^1/_{6200}$ Lux) ergaben durchaus übereinstimmende Werte. Wegen der innerhalb der physiologischen Grenzen liegenden Beobachtungsfehler bei der Untersuchung Ungeübter können die Zahlen (besonders der geringeren Helligkeiten) unbedenklich abgerundet werden. Es ergaben sich die in Tabelle I zusammengestellten Helligkeiten.

Tabelle I.

Leuchtfläche	Helligkeit entsprechend Lux	Netzhaut-empfindlichkeit E[1])
Frei	$^1/_{120}$	120
Hinter 1 Papierlage	$^1/_{232}$	230
„ 2 Papierlagen	$^1/_{448}$	450
„ 3 „	$^1/_{857}$	860
„ 4 „	$^1/_{1665}$	1 660
„ 5 „	$^1/_{3240}$	3 200
„ 6 „	$^2/_{6250}$	6 200
„ 7 „	$^1/_{12\,100}$	12 000
„ 8 „	$^1/_{23\,400}$	23 000

Die so verfügbaren Helligkeitsstufen genügen völlig zur exakten Lichtsinnprüfung.

Wesentlich war es noch, die Beeinflussung der Präparate durch zeitweise Belichtung kennen zu lernen. Mangels einschlägiger Literatur wurde daraufhin eine Anzahl von Versuchen

[1]) Mit Empfindlichkeit der Netzhaut $= E$ wird der reziproke Wert der Helligkeit bezeichnet. Diese Rubrik der Tabelle enthält abgerundete Werte.

durchgeführt, die ergaben, daß nach Belichtung die Grundmasse des Präparates zwar eine Zeitlang nachleuchtet, daß aber die Intensität des Phosphoreszenzlichtes erst schnell, dann langsamer abklingt[1]), so daß auch nach stärkster Besonnung nach 6 bis 7 Stunden wieder sicher der alte Wert erreicht, das Präparat also wieder zu Messungen brauchbar ist.

Tabelle II bringt einige Beispiele von derartigen Versuchen.

Tabelle II.

Belichtung	Erreichte Helligkeit entsprechend Lux	Ursprüngliche Helligkeit nach
1 Stde. Mittagsonne (2. Aug.)	> 1,6	6 Stdn.
1 Stde. heller Arbeitsplatz (3 bis 4 Uhr nachmittags)	1,6	3 „
15 Sek. 2 m vom Fenster, 7^{45}	$^1/_{1,2}$	1 „
1 Min. 2 m „ „ 8^0	$^1/_{1,2}$	1 „
1 Stde. in 2 m von 50 HK Mattbirne	$^1/_{17}$	30 Min.
10 Min. „ 2 m „ 50 HK „	$^1/_{30}$	20 „
2 Min. in 50 cm „ 50 HK „	$^1/_{17}$	30 „

Die Empfindlichkeit ist demnach ziemlich erheblich, und man muß nach vorausgegangener Belichtung mindestens 3 Stunden — nach Besonnung sogar 6 bis 7 Stunden — warten, um sicher zu sein, daß die alte Helligkeit wieder erreicht ist. Eine dauernde Schädigung ließ sich bis jetzt nicht nachweisen. Trotzdem ist zu empfehlen, die Leuchtschirme vor Licht möglichst zu schützen, da über schädigende Einflüsse länger dauernder Belichtungen, wie man sie etwa vom Baryumplatincyanür kennt, noch nichts ausgesagt werden kann.

[1]) Der Helligkeitsverlauf entspricht dem von den Erdalkaliphosphoren bekannten.

Verhandlungen

der

Deutschen Physikalischen Gesellschaft

Im Auftrage der Gesellschaft herausgegeben

von

Karl Scheel

20. Jahrg. | 30. Dezember 1918. | Nr. 21/24.

Sitzung vom 2. November 1918.

Den Inhalt der Sitzung bildet eine Gedenkfeier für

Richard Assmann,

welche gemeinsam von der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft und dem Deutschen Luftfahrer-Verband veranstaltet ist. Die Gedächtnisrede hält Hr. H. HERGESELL.

Sitzung vom 29. November 1918.

Vorsitzender: Hr. H. RUBENS.

Der Vorsitzende teilt mit, daß

Geheimer Regierungsrat Dr. **Emil Lampe,**
Professor an der Technischen Hochschule Berlin,
† 4. September 1918,

und

Dr. **Georg von dem Borne,**
Professor an der Universität Breslau,
† 7. November 1918,

verstorben sind. Die Anwesenden ehren das Andenken der Entschlafenen durch Erheben von den Sitzen.

Sodann berichtet Hr. **Friedr. Ahlborn** über

experimentelle Untersuchungen über die Entstehung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung.

Als Mitglieder wurden in die Gesellschaft aufgenommen:

Hr. KARL GENTIL, Schöneberg, Wielandstr. 92 und
Frl. Dr. HILDEGARD GOERIG, Schöneberg, Akazienstr. 5.
(Beide vorgeschlagen durch Hrn. G. BERNDT.)
Frau cand. phys. Dr. JETTY COHN, Zürich, Goldauerstr. 23 und
Frl. stud. math. EDITH EINSTEIN, Zürich, Goldauerstr. 23.
(Beide vorgeschlagen durch Hrn. A. EINSTEIN.)
Hr. Dipl.-Ing. MAX SCHULER, Neumühlen b. Kiel, Heikendorfer Weg 23.
Hr. Ingenieur HEINRICH PEIKERT, Kalkberge, Mark, Maienbergstr. 8.
(Beide vorgeschlagen durch Hrn. KARL SCHEEL.)
Hr. Dr. R. SCHACHENMEIER, Karlsruhe, Haydnplatz 3.
(Vorgeschlagen durch Hrn. O. LEHMANN.)
Dr. ERICH F. HUTH, Gesellschaft für Funkentelegraphie m. b. H., Berlin SW. 48, Wilhelmstr. 130—132.
(Vorgeschlagen durch Hrn. E. JAHNKE.)
Hr. Lehramtsassistent JOSEF WIMMER, Öttingen (Bayern).
(Vorgeschlagen durch Hrn. H. WIESENT.)

Sitzung vom 13. Dezember 1918.

Vorsitzender: Hr. A. EINSTEIN.

Hr. **E. Jahnke** hält einen Nachruf auf EMIL LAMPE.

Sodann berichtet Hr. **M. Born**

über die absolute Berechnung der Kristalleigenschaften mit Hilfe BOHRscher Atommodelle

nach einer gemeinsam mit Hrn. A. LANDÉ ausgeführten Arbeit.

Endlich spricht Hr. **A. Landé** über die

Dynamik der räumlichen Atomstruktur (Stereoatomistik).

Als Mitglied wurde in die Gesellschaft aufgenommen:

Frl. THEA KRÜGER, Berlin-Wilmersdorf, Tübingerstr. 4a.
(Vorgeschlagen durch Hrn. J. FRANCK.)

Verbietet die Relativitätstheorie Raum und Zeit als etwas Wirkliches zu denken?

von J. Petzoldt.

(Eingegangen am 10. Oktober 1918.)

Wenn die Relativitätstheorie verböte, Raum und Zeit als Wirklichkeiten zu denken, so bliebe für diese Theorie nur übrig, beide als Schein zu erklären — nicht in dem Sinne von Irrtum, wie mir etwas ein Flieger zu sein scheint, was sich bei näherem Zusehen als ein Vogel erweist, sondern in dem der Erscheinung im KANTschen Sinne, die durchaus empirische Realität, aber nur transzendentale Idealität besitzt, d. h. der gegenüber wir uns in all unserem praktischen Forschen und Handeln genau so verhalten dürfen, als ob sie wirklich wäre, die aber in Wirklichkeit, in der transzendenten Realität, im Absoluten, im Ding oder der Welt an sich nicht vorhanden ist. Und es bliebe dann nur noch zu untersuchen, ob man als Quelle von Raum und Zeit — um im KANTschen Anschauungskreis zu bleiben — die Sinnlichkeit oder den Verstand anzusehen habe, ob Raum und Zeit wie die Farben als Empfindungen gegeben seien oder ob sie vielmehr für apriorische Formen der Empfindungen genommen werden müßten.

Nun ist die Relativitätstheorie tatsächlich nicht aus dem transzendentalen Idealismus KANTS, sondern aus dem relativistischen Positivismus MACHS entsprungen. Gleichwohl dürfte die Mehrzahl der theoretischen Physiker geneigt sein, jene Theorie als Beweis für die Idealität von Raum und Zeit zu nehmen und sich mit ihren Paradoxieen durch die noch größere, aber gewohnte abzufinden, daß die Welt nur Vorstellung sei. Ein neues Anzeichen dafür ist die Äußerung SOMMERFELDS, daß EINSTEIN den Schwierigkeiten der Optik und Mechanik durch das „Verbot" abgeholfen habe, „Raum und Zeit als etwas Wirkliches zu denken [1]". Ich bin nun nicht nur der Ansicht, daß EINSTEIN nicht entfernt

---

[1]) SOMMERFELD, „Über die Entdeckung der Quanten" in der Festschrift zu PLANCKS 60. Geburtstag. Karlsruhe 1918, S. 18.

so etwas gemeint hat, sondern auch der weitergehenden, daß ein solcher Satz niemals in logisch zulässiger Weise aus der Relativitätstheorie gefolgert werden kann. Gleichwohl glaube ich, daß der SOMMERFELDschen Bemerkung ein richtiges Gefühl zugrunde liegt, nur eben in unhaltbare begriffliche Bahnen gelenkt.

Wer in einer naturwissenschaftlichen Anschauung aufgewachsen ist, wie sie etwa bei EMIL DU BOIS REYMOND vorliegt und bis in die siebziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts hinein unbestritten herrschte, wie sie aber auch heute noch weit verbreitet, ja unter den naturwissenschaftlich Gebildeten und Geschulten geradezu populär ist, also in der mechanischen Naturansicht, an den stellt in der Tat die Relativitätstheorie ungeheuerliche Zumutungen. Er soll die bloße Bewegung eines Körpers im Raume als Ursache einer Gestaltsänderung desselben ansehen und — was noch weit erschütternder ist — die bloße relative Bewegung. Geht er im Zimmer auf und ab, so soll davon allein Gestalt und Volumen aller Gegenstände innerhalb und außerhalb des Zimmers und dessen Gestalt und Rauminhalt selbst abhängen. Unterbricht er seinen Gang, so sind die ursprünglichen Formen- und Größenverhältnisse wieder hergestellt. Damit wird nicht nur der alte Kraft-, sondern der Ursachsbegriff überhaupt über Bord geworfen. Wirkung im alten Sinne gibt es nicht mehr. Oder sollte ein verborgener Mechanismus jene Erscheinungen hervorzubringen imstande sein? Wir werden gleich sehen, daß eine solche Annahme mit dem Sinn und Geist der Relativitätstheorie unvereinbar ist.

Inzwischen kommt noch Bedenklicheres hinzu und ist schon im Gesagten enthalten. Die Veränderungen, die der relativ zu den Gegenständen seiner Umgebung bewegte Beobachter an diesen feststellt, kann der relativ zu ihnen ruhende niemals feststellen. Das Maß jener Veränderungen ist aber eine Funktion der relativen Geschwindigkeit des Beobachters gegenüber den beobachteten Dingen. Jede solche Geschwindigkeit bedingt also eine andere Gestalt und ein anderes Volumen des jeweils beobachteten Gegenstandes. Demselben Ding können somit zu gleicher Zeit zahllose Gestalten und Volumina zukommen. Und von keiner Gestalt und keinem Volumen kann man ohne Willkür behaupten, daß es die dem Körper an und für sich eigentümlichen, seine eigentlichen seien. Da liegt dann allerdings der historisch so

wohl vorbereitete Gedanke nahe, daß die der physikalischen Erfahrung gegebenen Gestalten und Volumina der Körper nur Erscheinungen, nur scheinbare sind, nichts Wirkliches. Und darin kann man durch die dritte und allerkühnste These der Relativitätstheorie nur noch bestärkt werden.

Diese besagt, daß in einem zum Beobachter relativ bewegten System alle Vorgänge langsamer ablaufen, als wenn das System relativ zu ihm ruhte, und daß darin innerhalb bestimmter Grenzen die zeitliche Anordnung der Ereignisse eine andere ist. Auch hier ist das Maß der Änderungen gegenüber dem relativ ruhenden System eine Funktion der relativen Geschwindigkeit. 'Dieselben' Vorgänge können im verschiedensten Tempo ablaufen und mannigfaltige zeitliche Bestimmung erfahren, ohne daß man von irgendeinem Tempo und irgendeiner chronologischen Einordnung mit Recht behaupten könnte, sie seien die dem Vorgang eigentlich zukommenden. Liegt es also nicht nahe, auch die zeitlichen Eigenschaften der Dinge nur für Schein zu erklären?

Vielleicht wird das alles noch deutlicher, wenn wir auf einen Umstand der Theorie achten, der in ihren Darstellungen gewöhnlich vernachlässigt wird. Sie muß so aufgefaßt werden, daß jedem von einer Menge relativ gegeneinander bewegter Beobachter ein eigenes Raum-Zeit-System zukommt, in dem keines der anderen Platz hat. Denn wenn jeder der Beobachter gegen jeden anderen relativ bewegt ist, so vermag keiner die Beobachtungen irgendeines der anderen zu machen; jeder lebt gewissermaßen in einer eigenen Welt für sich, in einer Art SPINOZA-LEIBNIZscher Monade, die keine Fenster hat — oder er ist eine solche Monade. Er vermag nur mit Hilfe der Lorentz-Transformation seine Beobachtungen in eindeutige Beziehung zu den Beobachtungen der anderen zu setzen, die Beobachtungen der anderen in sein System verzerrt zu übertragen, die anderen Systeme auf sein System abzubilden und umgekehrt. Daher muß jeder Versuch, die Erfahrungen auch nur zweier gegeneinander bewegter Beobachter, wie sie die Relativitätstheorie meint, durch ein Modell darzustellen, mißlingen und zu Irrtümern führen.

Sehr belehrend ist in dieser Hinsicht das sorgfältig, aber eben von einem falschen Standpunkte aus durchdachte Modell EMIL COHNS, dessen Schrift weite Verbreitung gefunden hat, obwohl sie unhaltbare Vorstellungen vom Wesen der Relativitäts-



theorie gibt[1]). Der Erfinder zeigt uns wohl, wie der ruhende Beobachter auf der Sonne eine Strecke auf der vorüberziehenden Erde verkürzt wahrnimmt und eine in der Bewegungsrichtung vorn liegende Uhr nachgehend; aber daß der Erdenmensch dieselbe Wahrnehmung hinsichtlich der entsprechenden Strecke und Uhr des Sonnenmenschen macht, das gibt das Modell nicht wieder und kann es gar nicht wiedergeben, weil sonst dieselbe Strecke des Sonnenmenschen zugleich größer und kleiner als die entsprechenden des Erdenmenschen und die Uhren jenes zugleich synchron und nichtsynchron erscheinen müßten. Da jeder der beiden Beobachter an den Strecken und Uhren des anderen Systems das gleiche und doch nicht mit dem im eigenen System Beobachteten Identisches wahrnehmen soll, so können die beiden Systeme eben unmöglich in einem und demselben Raume eingebettet sein[2]).

Von der unrichtigen Grundauffassung aus kommt so der Verfasser auch zu einer, wenn auch nicht ausgesprochenen, doch implizite in seinen Ausführungen enthaltenen Theorie des Scheins,

---

[1]) Emil Cohn, Physikalisches über Raum und Zeit, 3. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner, 1918.

[2]) In dieser Hinsicht scheint mir auch die ausgezeichnet durchdachte gemeinverständliche Darstellung Einsteins [A. Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (gemeinverständlich). 3. erweiterte Auflage, Braunschweig, 1918, namentlich S. 19ff.] der Ergänzung zu bedürfen. Um die Relativität des Begriffes der räumlichen Entfernung zu zeigen, verwendet Einstein die Bewegung des Eisenbahnzuges gegenüber dem Bahndamm. Er sagt da (S. 20): „Legt der Mann im Wagen in einer Zeiteinheit — vom Zuge aus gemessen — die Strecke w zurück, so scheint diese Strecke — vom Bahndamm aus gemessen — nicht mehr gleich w zu sein.“ Das muß den Eindruck erwecken, als sei noch immer ein absoluter Maßstab vorausgesetzt, eine Strecke w, die gleichsam über den beiden Systemen schwebt. Der Beobachter auf dem Bahndamme mißt gar nicht die Strecke des Mannes im Wagen, d. h. die Strecke, die dieser erfährt und mißt; es ist gar nicht ›dieselbe‹ Strecke, die die beiden erfahren. Ort und Länge der Strecke, die der Beobachter auf dem Bahndamme mißt, sind vielmehr nur ein ›Bild‹, eine ›Abbildung‹ der Strecke des Mannes im Wagen für das Bahndammsystem und umgekehrt. In jedem der beiden Systeme sind Bahndamm und Zug enthalten. Jeder der beiden Beobachter erfährt ›Bilder‹ von den Längen und Ereignissen im anderen System. Und die Relativitätstheorie lehrt, daß die Erfahrungen, die der Beobachter im eigenen System macht, mit den ›Bildern‹, die der Beobachter des anderen Systems von ›denselben‹ Gegenständen erfährt, nicht übereinstimmen. Die ›Bilder‹ stehen aber mit den ›abgebildeten‹ Erfahrungen in eindeutigem Zusammenhang, der durch die beiden Systemen gemeinsamen Größen c und v hergestellt wird.

die sich freilich von der SOMMERFELDS prinzipiell unterscheidet. Es liegt ihm durchaus fern, Raum und Zeit der Wirklichkeit zu entkleiden. Er hat vielmehr, ähnlich wie LORENTZ, nur ein Raum-Zeit-System, das im grunde das alte NEWTONsche absolute ist, das des „Sonnenmenschen." Dessen Maßstäbe bleiben in Wirklichkeit unverändert, und seine Uhren laufen in Wirklichkeit synchron. Der „Erdenmensch" dagegen wird getäuscht und merkt das nur nicht, weil er seine absolute Bewegung gegen das System des „Sonnenmenschen" nicht empfindet. Hin- und Rückweg des Lichtes von Uhr zu Uhr sind ungleich lang; da er sie aber für gleich lang hält, kommt er zu asynchronischer Einstellung seiner Uhren[1]). Dem widersprechen zwar spätere Ausführungen des Verfassers, aber nicht so, daß sie einen Zweifel an der Zulässigkeit seines Modells in ihm aufkommen ließen. Solche Zweifel scheinen sich indessen auch sonst in der physikalischen Welt nicht erhoben oder wenigstens nicht laut gemacht zu haben, sonst hätten sie doch dem Erfinder des zuerst gewiß bestechenden Modells zu Ohren kommen müssen. Der Grund liegt vielleicht darin, daß die Relativitätstheorie noch immer weit mehr in ihrer abstrakten mathematischen Form als in ihrem konkreten anschaulichen Inhalt verbreitet ist[2]), und daß es unserer Zeit noch immer sehr schwer fällt, das metaphysische Joch des Absoluten abzuschütteln. So verflicht sich moderne und veraltete Auffassung oft unentwirrbar ineinander. Die ganze Schönheit und Großartigkeit der Relativitätstheorie entfaltet sich aber erst dem, der das Absolute vollständig überwunden hat.

Es ist keinerlei mechanische Substruktion für die Veränderungen denkbar, die die Relativitätstheorie mit der Gestalt und dem Volumen der Körper und mit dem Ablauf alles Geschehens vornimmt. Diese Veränderungen können niemals in einem einzigen Raum-Zeit-System ihre auschauliche Darstellung finden, sondern immer nur in einer Mehrzahl solcher. Anders können auch die Äußerungen MINKOWSKIS über die enge Verbindung von Raum und Zeit und über die Kontraktion als „Geschenk von oben, als Begleitumstand des Umstandes Bewegung" nicht aufgefaßt werden. Wenn das Auge des mitbewegten Beobachters —

---

1) E. COHN, a. a. O., S. 14 f.

2) Vgl. PETZOLDT, Die Relativitätstheorie der Physik. ZS. f. positivist. Philos. 1914, S. 30 ff.

des „Erdenmenschen“ — nur groß genug wäre, oder wenn seine tastenden Hände nur weit genug reichten, so müßte er seine richtig gestellten Uhren alle unmittelbar synchron finden, während Auge und Hand des ruhenden Beobachters — des „Sonnenmenschen“ — sie ebenso unmittelbar als asynchron feststellen würden.

Muß nun aber auch eine Auffassung des Scheines und seine Zurückführung auf wahres absolutes Geschehen, wie wir sie bei E. Cohn vorgefunden haben, verworfen werden, so dürfte sich jetzt die Sommerfeldsche Auffassung mit um so größerer Wucht geltend machen. Zahllose gleichberechtigte Raum-Zeit-Systeme, kein ausgezeichnetes, kein absolutes, was sollte da wohl anders übrig bleiben als von allen diesen einander widersprechenden Darstellungen zu behaupten, daß auch nicht eine von ihnen die Wirklichkeit erreicht? Was anderes, als sie alle nur für Abbildungen oder Erscheinungen eines völlig unbekannten, ewig verborgenen Geschehens zu erklären?

Denn bedenken wir nur: wenn Raum und Zeit nur Erscheinungen sind, dann sind es alle durch die Sinne wahrgenommenen Gegenstände überhaupt, da ja Farben, Töne usw. als die alten sekundären Qualitäten schon immer der Wirklichkeit beraubt waren. Bei Locke und in der mechanischen Naturansicht galten die primären Qualitäten der Dinge — Raum, Zeit, Bewegung und die ihren Raum undurchdringlich erfüllende Materie — als Wirkliches. Erst Berkeley hob den Unterschied zwischen primären und sekundären Qualitäten auf. Diese gewaltige Leistung drang aber nicht bis zu den Naturforschern durch, sie blieb ausschließlicher Besitz der Philosophen. Heute ist die Naturwissenschaft dabei, sie zum allgemeinen Eigentum zu machen, aber auch dabei, in denselben Fehler zu verfallen, den in diesem Entwickelungsprozeß die Philosophie gemacht hat.

Indessen liegt noch ein weiterer Umstand vor, der den modernen Physiker leicht veranlassen kann, die Natur zur Erscheinung zu stempeln. Das ist seine Stellungnahme zu der Frage, welche Aufgabe denn die Naturwissenschaft überhaupt hat. Gegenüber dem alten Glauben, daß Naturwissenschaft, im besonderen Physik das Ziel habe, die Naturvorgänge vollständig zu erklären, die absolute Wahrheit über die Natur zu ermitteln, hat sich seit den siebziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts

die Überzeugung Bahn gebrochen, daß es sich immer nur darum handeln könne, die Naturvorgänge zu beschreiben, d. h. das Beobachtete festzulegen, darzustellen, wiederzugeben, und zwar vollständig und auf die einfachste Weise. Zu diesem Standpunkt gelangte schon GALILEI, als er bei der Untersuchung der Fallgesetze nicht mehr die alte Aristotelische Frage nach dem Warum, sondern nur nach dem Wie stellte. NEWTON nahm ihn ein, als er sagte, daß in seinem Gravitationsgesetz keine Hypothesen enthalten seien. Und ROBERT MAYER machte ihn zur beherrschenden Methode seiner Naturbetrachtung überhaupt, als er den Satz aufstellte, daß eine Tatsache, die nach allen Seiten hin bekannt, damit auch schon erklärt und daß damit die Aufgabe der Naturwissenschaft ihr gegenüber gelöst sei. Es war eine umwälzende Einsicht, als man erkannte, daß Physik in ihren Gleichungen, also in ihrem exaktesten Ausdruck im grunde nie etwas anderes getan hatte; daß in ihnen alles, was sie zu sagen hatte, enthalten sei, und daß die angeblich erklärenden Vorstellungen, die man noch hinzugefügt habe, höchstens den Wert von Hilfsvorstellungen, Arbeitshypothesen, Bildern hätten, oft aber und jedenfalls zuletzt ganz überflüssig seien und nur auf Irrwege locken könnten. Damit sind im Prinzip die mechanische Substruktion, die mechanistische Naturansicht aufgegeben, die anderen Gebiete der Physik der Mechanik gleichgestellt und die Erkenntnis auf die Erfahrung eingeschränkt worden. Damit sind aber zugleich die Sinne in ihre vollen Rechte eingesetzt, denn wirklich beobachtetes Naturgeschehen ist immer sinnlich gegebenes, und so ist die Gefahr heraufbeschworen, alle Erkenntnis auf Erscheinungen, auf die Welt der Empfindungen im Sinne von Subjektivem einzuschränken und die Wirklichkeit als unerkennbar, die Wahrheit als unerreichbar hinzustellen. Die Forderung, daß alle Naturerkenntnis auf Naturbeschreibung hinauslaufen müsse, kann somit vortrefflich mit der SOMMERFELDschen Auffassung der Relativitätstheorie zusammengestimmt werden: Raum und Zeit sind von den Sinnen vorgetäuscht; wie die Täuschung zustande kommt, das zu erforschen übersteigt die Grenzen der menschlichen Erkenntnis; die Aufgabe der Naturwissenschaft erschöpft sich in der Beschreibung des Produktes jener Täuschung.

Die Beziehung zwischen der Lehre von der Beschreibung und der Relativitätstheorie ist aber noch enger. Ohne die Einsicht,

daß haltbare physikalische Erkenntnis zu allen Zeiten nur in Beschreibung bestanden hat, hätte kein Forscher die Kühnheit haben können, jede Bewegung ausschließlich als relative zu denken. Jede Beschreibung ist zwar schon ihrem Wesen nach Relativierung, ist In-Beziehung-Setzen von Teilen oder Teilvorgängen eines Systems zu anderen seiner Teile oder zu einem anderen System. Was die Relativitätstheorie aber noch hinzubringt, ist der Verzicht auf ein ausgezeichnetes Bezugssystem, da die Erfahrung ein solches nicht aufweist, und damit die Anerkennung einer Menge gleichberechtigter Systeme. Und weiter! Wie wäre es ohne tiefstes Durchdrungensein von dem Gedanken der Beschreibung möglich gewesen, Gestalt und Volumen der Körper von ihrer relativen Geschwindigkeit abhängig zu machen und schließlich gar noch das Tempo des Geschehens von System zu System wechselnd und als Funktion jener Geschwindigkeit zu denken! Welche gewaltige Vermehrung der Mittel der Beschreibung und welche Erweiterung unseres geistigen Gesichtskreises! Und doch soll uns das alles nur noch deutlicher machen, daß „wir nichts wissen können“, daß wir nur Sinnenschein beschreiben und an die wirklichen Dinge nie herankommen können.

Ja, diese Dinge können nicht einmal hypothetisch erreicht werden. Wenn Heinrich Hertz sagt, daß wir uns von den beobachteten Vorgängen Bilder „entwerfen“, so kann er damit nur meinen, daß wir solche Bilder vorstellen und dann beschreiben; er beschreibt die verborgenen Bewegungen, die er zu den beobachteten hinzu vorstellt. Und so sind alle physikalischen Hypothesen nie mehr als Beschreibungen von Vorstellungen. Selbst die kühnsten, von der Erfahrung am weitesten abweichenden Vorstellungen aber sind in allen ihren Elementen immer an die Erfahrung gebunden, sind in diesen Elementen reproduzierte Erfahrungen. Soweit es sich um Vorstellungen handelt, ist Lockes berühmter Satz unbestreitbar: nihil est in intellectu, quod non antea fuerit in sensu. Gehen wir aber zu unvorstellbaren Gedankentypen über, so beruht auch ihr naturwissenschaftlicher Wert — wie der von nichteuklidischen oder von mehr als dreidimensionalen Räumen — auf ihrer Anlehnung an Vorstellbares, an sinnlich Gegebenes. Die Dinge selbst, das Ding an sich im Gegensatz zur Erscheinung wird auch durch sie nicht getroffen; auch sie beschreiben zuletzt nur sinnliche Erfahrung.

Einschränkung auf die Erfahrung — und das heißt für die Naturwissenschaft nach ihrem gewöhnlichen Begriff auf die sinnliche Erfahrung — im Gegensatz zur Transzendenz in metaphysische Gebiete, das ist im grunde der Inhalt der so aufreizenden Forderung der Beschreibung gewesen. Der Wissenschaft wurde damit ein Halt bei letzten, elementaren Tatsachen geboten und die Möglichkeit verwehrt, zu letzten, unproblematischen Selbstverständlichkeiten fortzuschreiten. Das Hinausgehen über die Erfahrung führt immer zu irgendwelchen Willkürlichkeiten. Selbstverständliches, angeborene Ideen gibt es überhaupt nicht. Dem widerspricht nicht EINSTEINS Satz, „daß von den denkbaren theoretischen Konstruktionen eine einzige jeweilen sich als unbedingt überlegen über alle anderen erweist“ und „daß die Welt der Wahrnehmungen das theoretische System praktisch eindeutig bestimmt“ [1]). Jede solche Theorie ist eben nur den jeweilig bekannten Tatsachen gegenüber von allen berufenen die allein auserwählte, den zu ihrer Zeit noch nicht bekannten Tatsachen gegenüber enthält sie dagegen gewöhnlich Willkürlichkeiten. Daher führt die Entdeckung neuer Tatsachen im allgemeinen auch zum Umbau der Theorie, und keine Theorie kann den Anspruch auf absolute Geltung erheben; ihre Wahrheit ist immer nur relativ. Gelangt also die Betrachtung der Beschreibung nicht immer wieder zu jener verhängnisvollen Faustischen Einsicht? von der formalen Seite ebenso wie von der materialen?

Gleichwohl wird gerade eine weitere Prüfung des Begriffes der Beschreibung uns den Ariadnefaden in die Hand geben können, der uns aus dem Labyrinth metaphysischer Gedankengänge hinauszuleiten vermag.

Fragen wir, welcher psychologische Tatbestand der Bezeichnung ›beschreiben‹ zu grunde liegt. Was tun wir eigentlich, wenn wir ›beschreiben‹? Wir sagten oben (S. 195), daß wir da das Beobachtete festlegen, darstellen, wiedergeben. Das sind aber zusammengesetzte psychologische Vorgänge. Auf welchem einfacheren Geschehen beruhen sie?

Beschreiben ist ein Belegen wahrgenommener oder vorgestellter Tatbestände mit Begriffen, ein begriffliches Charakterisieren.

---

[1]) EINSTEIN in den Ansprachen „zu MAX PLANCKS sechzigstem Geburtstag“, a. a. O., S. 31.

Den um die Erde kreisenden Mond als geschleuderten Stein beschreiben heißt: ihn unter den Begriff 'geschleuderter Stein' bringen, ihn mit allen geschleuderten Steinen zusammenstellen, ihn als etwas diesen 'Ähnliches' oder als 'dasselbe' empfinden und empfinden lassen. Die dabei gefühlsartig auftretende begriffliche Charakteristik darf nicht als identisch mit der Wahrnehmung oder der Vorstellung eines geschleuderten Steines betrachtet werden. Sie ist vielmehr eine besondere psychologische Komponente neben den in der Wahrnehmung und in der Vorstellung auftretenden Empfindungen und Empfindungskomplexen; in unserem Beispiel allen besonderen Fällen von Wahrnehmungen oder Vorstellungen geschleuderter Steine gemeinsam; daher selbst auch nicht anschaulich, sondern nur an Anschauliches gebunden.

Auch alle eingehendere Beschreibung ist immer wieder begriffliche Charakteristik; so die Trägheits- und die Fallbewegung, auf die ich die Bahn des geschleuderten Steines zurückführe; so alle Gestalt- und Volumänderungen und alle Änderungen und Differenzen des Uhrganges in der Relativitätstheorie. So aber auch das vorzüglichste Mittel der theoretischen Physik, die Gleichung. Die beiden Seiten einer Gleichung charakterisieren begrifflich verschiedene Seiten oder ein und dieselbe Seite eines Vorganges, und dieses Begriffspaar wird dann wieder dem Begriffe der Gleichheit subsumiert. Wir haben so in jeder Gleichung, also auch in jedem Naturgesetz schon ein Begriffssystem vor uns; in einem Gleichungssystem wie in der Lorentz-Transformation ein zusammengesetzteres. Aber auch eine ganze Theorie ist nichts anderes als ein System begrifflicher Charakteristiken. Und so schließlich auch eine ganze Weltanschauung. Wer die Einsicht gewonnen hat, daß Naturwissenschaft, soweit sie haltbaren Erfolg hatte, niemals etwas anderes tat als vorgefundene und aufgesuchte Tatbestände zu beschreiben, d. h. also begrifflich zu charakterisieren — man darf auch sagen: festzustellen, zu registrieren oder zu systematisieren —, der wird angesichts des Umstandes, daß die psychologischen Tatbestände durchaus auf keine andere Weise vorgefunden werden als die physikalischen, chemischen und biologischen, auch von der umfassendsten Theorie, also von der Weltanschauung fordern, daß sie sich keine andere Aufgabe stelle als die Gesamtheit vorgefundener Tatbestände zu beschreiben, die gesamte Erfahrung begrifflich zu charakterisieren.

Allerdings unterliegen auch einstweilen noch nicht aufgedeckte, sondern nur vermutete Tatbestände dieser Beschreibung und begrifflichen Einordnung, aber eben nur insofern sie hypothetische Vorausnahmen künftiger Erfahrung sind, prinzipiell homogene Ergänzungen. Dagegen widerspricht es dem Prinzip der Beschreibung, in ihr System Heterogenes, prinzipiell nicht Wahrnehmbares aufzunehmen.

Das tun wir aber, wenn wir die gesamte Natur, die ganze sinnlich vorgefundene Welt für bloße Erscheinung erklären. Denn damit stellen wir ihr ein den Sinnen grundsätzlich verschlossenes Gebiet als Glied der Weltanschauung, sogar als deren wichtigeres Glied gegenüber. Nach SOMMERFELD kommen diesem Gebiete auch keine räumlichen, ja sogar nicht einmal zeitliche Eigenschaften zu: es ist also vollständig das Gebiet des KANTschen „Dings an sich", nicht etwa bloß etwas nicht Erfahrbares, sondern ein überhaupt nicht Vorstellbares, ja es kann als vorstellbar noch gar nicht einmal gedacht werden.

Das Ding an sich ist somit unbeschreiblich, und seine Annahme steht im logischen Widerspruche zum Prinzip der Beschreibung. Die Relativitätstheorie steht aber ganz auf dem Boden dieses Prinzipes. EINSTEIN hat das nie anders gemeint[1]), und die obigen Ausführungen haben es ausdrücklich dargelegt. Somit kann das Ding an sich niemals logisch aus der Relativitätstheorie gefolgert werden, vielmehr widerstreitet es logisch auch ihr. Und daher steht endlich auch die Ansicht, daß die Relativitätstheorie verbiete, Raum und Zeit als etwas Wirkliches zu denken, im logischen Widerspruch zu dieser Theorie.

Da nun also das Prinzip der Beschreibung und die Theorie, daß Raum und Zeit nichts Wirkliches seien, bzw. die Annahme des Dinges an sich, einander ausschließen, so bleibt zu untersuchen, welches der beiden Glieder dieses logischen Widerspruches wir fallen zu lassen haben. Sind wir vielleicht doch genötigt, jenes Prinzip aufzugeben? Gewiß, seine Aufstellung und Anerkennung war eine gewaltige Bewegung der Geister, die nur schwer wieder rückgängig zu machen wäre. Aber vielleicht gelänge und genügte es, für die Weltanschauung darauf zu verzichten und es auf die Naturwissenschaft einzuschränken?

---

[1]) Vgl. z. B. EINSTEIN, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie, S. 40 f., 65 f.

Fragen wir zunächst, welchen Vorteil denn die Annahme einer zweiten, eigentlichen Welt hinter der Welt der Erscheinungen unserem Erkennen brächte, welche Forderungen wir an sie zu stellen hätten.

Die Antwort kann nur lauten: sie muß die Mannigfaltigkeit der Welt der Erscheinungen eindeutig bestimmen.

Dazu muß sie selbst mindestens von dem Grade der Mannigfaltigkeit der Erscheinungen sein. Nun ist sie aber ohne alle unsere sinnlichen Qualitäten einschließlich der räumlichen und zeitlichen. Nehmen wir indessen einmal an, es sei uns vergönnt, sie zu erkennen, wie müßten wir uns dann ihr gegenüber verhalten? Ganz gewiß feststellend, zusammenfassend, ordnend, also wieder nur beschreibend. Und schließlich würden wir alle ihre Momente oder wenigstens die dabei in Frage kommenden den entsprechenden von ihnen abhängigen Momenten unserer Welt der Erscheinungen zuordnen, d. h. die betreffenden Paare oder Gruppen mit dem Begriff der Zusammengehörigkeit oder Gleichheit belegen, also auch hier wieder beschreiben. Andere Formen des menschlichen Erkennens gibt es eben nicht. Alle seine Methoden laufen auf Vergleichen oder auf Variieren der Umstände hinaus, und das muß stets zu Zusammenstellungen und Zuordnungen und d. h. auf Begriffe und Gesetze, Begriffs- und Gesetzessysteme, also zur Beschreibung führen.

Wenn aber das menschliche Denken mit jener zweiten, eigentlichen, angeblich hinter der Welt der Erscheinungen gelegenen Welt des Dings oder der Dinge an sich nicht im mindesten etwas anderes vornehmen könnte, als es schon mit der ersten, ihm allein gegebenen Welt der sogenannten Erscheinungen tut, da erhebt sich nun die andere Frage: kann denn dem Menschen die Welt der sinnlichen Erfahrung — einschließlich ihrer homogenen hypothetischen Erweiterungen und Ergänzungen — nicht vollkommen genügen? oder zwingt ihn etwas unvermeidlich, über sie hinaus eine prinzipiell andere, völlig heterogene Welt anzunehmen?

Nichts bringt uns die leiseste Kunde von jener fabelhaften, ungeheuerlichen Welt ohne Raum und Zeit außer unser eigenes Begriffssystem 'Erscheinung-Ding an sich'. Das ist aber kein angeborenes, sondern in historischer Entwickelung entstanden[1]).

[1]) Vgl. Petzoldt, Das Weltproblem, vom Standpunkt des relativistischen Positivismus aus historisch-kritisch dargestellt, 2. Aufl., Leipzig, Teubner, 1912.



Wir haben es also in der Hand, uns durch eine der Sachlage angepaßte Begriffsbildung von dem Spuk zu befreien.

Lassen wir jene transzendente Welt der Dinge an sich fallen — wieder nach dem Prinzip der Beschreibung, wonach diese auf die einfachste Weise erfolgen soll —, so hört auch sofort die gegebene Welt der sinnlichen Erfahrung auf, nur Erscheinung zu sein. Denn Ding an sich und Erscheinung sind korrelative Begriffe, von denen keiner ohne den anderen bestehen kann. Und nun hindert uns nichts mehr, die gegebene Welt begrifflich als wirklich zu charakterisieren und jene transzendente als nicht wirklich. Und damit sind wir endlich auch voll berechtigt, Raum und Zeit, diese unabtrennbaren Bestandstücke unserer sinnlichen Erfahrung als etwas Wirkliches zu denken. Nicht etwa den euklidischen Raum oder irgendeinen nichteuklidischen und nicht etwa die absolute Zeit Newtons. Jene Räume sind nicht wirklich, sind aber auch nicht etwa Erscheinungen: keine sinnliche Erfahrung weiß von ihnen etwas. Sie sind nur Begriffe und vorläufige Hilfsmittel der Beschreibung[1]). Absolute Zeit ist weder wahrnehmbar noch vorstellbar, ein leerer metaphysischer Begriff wie der des Dings an sich. Wirklich sind allein die Räume der Sinne: des Tastsinns, des kinaesthetischen Sinns und des Sehsinns; namentlich kommt für die Naturwissenschaft der Sehraum in Betracht. Und wirklich ist allein die in der Wahrnehmungs- und in der Vorstellungswelt enthaltene vorgefundene Zeit.

Die Räume und Zeiten der Relativitätstheorien sind nicht Annäherungen an die wirklichen Raum- und Zeiterfahrungen, sondern begriffliche Gebiete, auf welche diese Erfahrungen eindeutig abgebildet werden. Hätte Sommerfeld seine Behauptung auf diese Gebilde der Theorie eingeschränkt, so wäre nur zu erinnern gewesen, daß nicht erst die Relativitätstheorie verbiete, sie als Wirkliches zu denken, sondern daß das bereits vor ihr Einsichten der positivistischen Mathematik und Naturwissenschaft seien. Da er aber seine Behauptung ganz allgemein hinstellte, so bedurfte sie der Berichtigung.

[1]) Vgl. Petzoldt, Die Gebiete der absoluten und der relativen Bewegung. Ostwalds Annalen der Naturphilosophie 7, 1908.



Kristallgitter und Bohrsches Atommodell; von M. Born und A. Landé.

(Eingegangen am 5. November 1918.)

In einer kürzlich erschienenen Arbeit der Verfasser [1]) wurde der Versuch gemacht, einige reguläre Kristalle vom NaCl-Typus als Aggregate BOHRscher Atommodelle aufzufassen und die absolute Größe ihrer Gitterabstände aus universellen Konstanten und ganzen Zahlen (Atomnummern, Valenzzahlen usw.) vorauszuberechnen: Ein positives Alkaliion und ein negatives Halogenion, aufgebaut aus positiven Kernen und Elektronenringen, wirken in großer Entfernung so aufeinander, als seien ihre Ladungen in ihren Zentren punktförmig vereinigt, mit elektrostatischem COULOMBschen Potential umgekehrt proportional ihrem Abstand r. In größerer Nähe macht sich jedoch ihre Struktur bemerkbar in Zusatzpotentialen proportional der dritten, fünften usw. Potenz ihres Abstandes (die geraden Potenzen von r fallen durch Mittelung über alle Phasen der Elektronen auf ihren Kreisbahnen heraus) und man erhält das Gesamtpotential zweier solcher Ringsysteme in der Form:

$$\psi = r^{-1} . \overset{(-1)}{\psi} + r^{-3} . \overset{(-3)}{\psi} + r^{-5} . \overset{(-5)}{\psi} + \cdots, \qquad 1)$$

worin die Koeffizienten $\overset{(-n)}{\psi}$ von den Radien und räumlichen Orientierungen der beteiligten Elektronenringe abhängen.

Für den Kristallverband, wo jedes Ion unter dem Einfluß unendlich vieler anderer Ionen eine Gleichgewichtslage annimmt, wurde in der zitierten Arbeit die Vorstellung durchgeführt, daß die Ringe eines Ions alle konzentrisch und in einer Ebene liegen und daß die Achsen dieser komplanaren Ringsysteme abwechselnd in Richtung der vier langen Hauptdiagonalen des Elementarwürfels im kubischen Gitter zeigen. Entsteht also das Kristallgitter durch Reproduktion der acht Gitterpunkte

$$ijk = 000,\ \tfrac{1}{2}00,\ 0\tfrac{1}{2}0,\ 00\tfrac{1}{2},\ 0\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}0\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}0,\ \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2},$$

---

[1]) M. BORN und A. LANDÉ, Über die absolute Berechnung der Kristalleigenschaften mit Hilfe BOHRscher Atommodelle. Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1918, S. 1048.

so wurden den Ringachsen des Ions $(i\,j\,k)$ die Richtungskosinus

$$\frac{(-1)^{2i}}{\sqrt{3}}, \quad \frac{(-1)^{2j}}{\sqrt{3}}, \quad \frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{3}} \tag{2}$$

zugeschrieben. Bei dieser mit der kristallographischen Regularität verträglichen Ringorientierung heben sich durch Summierung der Potentiale (1) über alle Gitterpunkte des kubischen Gitters die mit r^{-3} proportionalen Glieder fort, und es bleibt als Gesamtpotential Φ aller Gitterpunkte auf die acht Gitterpunkte des Elementarkubus δ^3 übrig:

$$\Phi = \delta^{-1}.\overset{(-1)}{\Phi} + \delta^{-5}.\overset{(-5)}{\Phi} + \cdots, \tag{3}$$

entwickelt nach reziproken Potenzen des Elementarabstandes δ von einem $+$-Ion längs einer Würfelkante zum folgenden $+$-Ion. Aus der Gleichgewichtsbedingung $d\,\Phi/d\,\delta = 0$ ergibt sich dann unter Vernachlässigung höherer Entwickelungsglieder der Gitterabstand δ:

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{-5\overset{(-5)}{\Phi}}{\overset{(-1)}{\Phi}}}. \tag{4}$$

Benutzt man als Maßeinheit den Radius

$$a_0 = 0{,}528 . 10^{-8}\,\mathrm{cm} = \frac{h^2}{4\,\pi^2 e^2 m} \tag{5}$$

des innersten, einquantigen Ringes beim BOHRschen Wasserstoffatom, ferner die auf a_0 reduzierten Radien der Elektronenringe im $+$-Ion und $-$-Ion:

$$\alpha_{k+} = \frac{a_{k+}}{a_0}, \qquad \alpha_{k-} = \frac{a_{k-}}{a_0} \qquad \begin{cases} k = 1\colon & K\,\text{Ring} \\ k = 2\colon & L\,\text{Ring} \\ k = 3\colon & M\,\text{Ring usw.} \end{cases} \tag{5'}$$

und die Anzahlen p_k der Elektronen, welche den $k$ten Ring bilden, dazu die Zahl (BORN und LANDÉ, l. c., § 5)

$$\overset{(-1)}{\Phi} = -27{,}84$$

für das COULOMBsche Potential aller Gitterpunkte auf die acht Punkte des Elementarkubus δ^3 (reduziert auf Punktladungen $e = +1$), so ergibt sich für δ die Formel (l. c., § 6):

$$\delta = 0{,}52 . 10^{-8} \left[\frac{4.5}{27{,}84}\left\{37{,}4\left[(\Sigma p_k \alpha_k^2)_+^2 + (\Sigma p_k \alpha_k^2)_-^2\right] \right.\right. \tag{6}$$

$$\left.\left. - 57{,}4\left[(\Sigma p_k \alpha_k^4)_+ - (\Sigma p_k - \alpha_k^4)_-\right] + 293{,}2 (\Sigma p_k \alpha_k^2)_+ . (\Sigma p_k \alpha_k^2)_- \right\}\right]^{1/4} \mathrm{cm}.$$

*

Um die Gitterkonstanten δ der verschiedenen Halogen-Alkalisalze zu erhalten, hat man hier für die auf a_0 reduzierten Ringradien α_k und ihre Belegungszahlen p_k mit Elektronen die Werte einzusetzen, welche durch die BOHRsche Theorie und ihre Erweiterung auf höhere Elemente des periodischen Systems nahegelegt werden, und die Summen $(\Sigma p_k \alpha_k^2)_+$ usw. über alle Ringe des $+$-Ions (bzw. $-$-Ions) auszuführen.

Die Formel 6) für δ ist zunächst nur für den Fall aufgestellt, daß in jedem einzelnen Ion alle Ringe **komplanar** sind, also sämtliche Ringachsen des Ions ijk die Richtungskosinus (2) besitzen. Würde man den inneren Ringen davon abweichende Achsenrichtungen zuschreiben, etwa dem zweitäußersten Ring des Ions ijk die Achsenrichtungskosinus:

$$\frac{(-1)^{2j}}{\sqrt{3}}, \quad \frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{3}}, \quad \frac{(-1)^{2i}}{\sqrt{3}} \tag{7}$$

und dem drittäußersten Ring die Richtungen:

$$\frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{3}}, \quad \frac{(-1)^{2i}}{\sqrt{3}}, \quad \frac{(-1)^{2j}}{\sqrt{3}}, \tag{7'}$$

so würden die Summenglieder in 6), welche sich auf diese inneren Ringe beziehen, mit anderen Zahlenfaktoren auszustatten sein. Da aber die Radien α als höhere Potenzen in den Radikanden von 6) eingehen, so bestimmen im wesentlichen doch nur die **äußersten** Ringe den Wert von δ; auch bei Verzicht auf Komplanarität würde δ keinen wesentlich anderen als den nach 6) berechneten Wert bekommen, falls nur die Radien und Orientierungen der äußersten Ringe erhalten bleiben [1]).

Das letztere ist nun aber bei Umorientierung der inneren Ringe keineswegs der Fall. Nach A. SOMMERFELDS [2]) allgemeiner Theorie BOHRscher Ringsysteme sind vielmehr die absoluten Werte der äußersten Ringradien ziemlich empfindlich gegen Orientierungsänderungen der inneren Ringe. SOMMERFELD gibt dafür folgende Formeln an. n_k sei die Anzahl der Quanten, welche jedes Elektron

---

[1]) Schreibt man dagegen auch den äußersten Ringen der Ionen eine Orientierung 7) oder 7') zu, so ändern die Zahlenfaktoren im Radikanden von 6) sich so, daß der Radikand **negativ**, also δ imaginär ausfällt. Für die äußersten Ringe ist also nur die Orientierung 2) zulässig.

[2]) A. SOMMERFELD, Phys. ZS. **19**, 297, 1918.

des $k$ten Ringes gemäß der Impulsgleichung (SOMMERFELD, l. c., Gl. 2):

$$m a_k^2 \omega_k = \frac{n_k h}{2\pi} \tag{8)}$$

auf seiner Kreisbahn mitbekommt („der $k$te Ring ist n_k-quantig"). Der auf a_0 5) reduzierte Radius $\alpha_k = a_k : a_0$ 5') bestimmt sich dann aus der Gleichung (SOMMERFELD, l. c., Gl. 10):

$$\alpha_k = \frac{n_k^2}{Z_k + A_k}, \tag{8')}$$

in welcher Z_k die gesamte Ladungszahl innerhalb des $k$ten Ringes (Kernladung Z vermindert um die inneren Ringladungen $\sum_{i<k} p_i$) vermindert um die „Abschirmungskonstante" s_{p_k} für p_k Elektronen im $k$ten Ring bedeutet (SOMMERFELD, l. c. S. 297):

$$s_p = \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{p-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi l}{p}} \tag{9)}$$

z. B. $s_2 = 0{,}25$, $s_8 = 2{,}805$, $s_{10} = 3{,}863$;

$$Z_k = Z - \sum_{i<k} p_i - s_{p_k}. \tag{9')}$$

Neben Z_k tritt in 8') noch eine von der gegenseitigen Beeinflussung der Ringe herrührende Konstante A_k auf, welche den Wert (SOMMERFELD, l. c., Gl. 20):

$$A_k = -\frac{3}{2} \sum_{j<k} p_j c_{jk} \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_k}\right)^2 + \sum_{j>k} p_j c_{jk} \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_j}\right)^3 \tag{10)}$$

hat, worin c_{jk} sich aus dem Winkel ϑ_{jk} zwischen den Achsen des Ringes j und k bestimmt zu (SOMMERFELD, l. c., Gl. 19):

$$c_{jk} = \frac{3 \cos^2 \vartheta_{jk} - 1}{4}. \tag{11)}$$

Man ersieht hieraus, daß die Beeinflussungskonstante A_k den Radius α_k 8') des äußersten Ringes vergrößert, wenn die inneren Ringe komplanar ($\vartheta_{ik} = 0$) sind, dagegen verkleinert, wenn die inneren Ringe senkrecht auf dem äußersten stehen ($\vartheta_{jk} = \pi/2$), daß jedoch ein wie in 7) oder 7') orientierter innerer Ring ($\cos^2 \vartheta_{ik} = 1/3$) den äußeren Ring gar nicht beeinflußt, indem sein Beitrag zu A_k verschwindet.

Stellt man nun die Forderung auf, daß die Ringe innerhalb des Ions die Stellung minimaler potentieller Energie einzunehmen suchen, so würde SOMMERFELDs Theorie senkrecht gekreuzte Ringe im Ion ergeben. Aber abgesehen davon, daß eine solche senkrecht gekreuzte Ringstellung mit der Regularität des Kristallsystems schwer zu vereinigen ist, spricht auch der Vergleich mit der Beobachtung der Gitterkonstanten δ stark zugunsten komplanarer Ringanordnung im Ion. Denn nur bei komplanarer Ringstellung bewirken hinzukommende innere Ringe eine Vergrößerung des äußersten Ringes 8') 10) und damit eine Vergrößerung der Gitterkonstanten δ 6) mit zunehmender Atomnummer der beteiligten Ionen im periodischen System der Elemente, wie es die Erfahrung fordert. Senkrecht gekreuzte innere Ringe würden dagegen beim Fortschreiten im periodischen System eine Verkleinerung der äußersten Radien α und damit eine Verkleinerung von δ ergeben, während die innere Ringorientierung 7) oder 7') wegen $A_k = 0$ konstante Radien α der äußersten Ringe und damit konstante Gitterabstände δ für alle Alkali-Halogenverbindungen ergeben würde, im Widerspruch zur Erfahrung. Die Annahme komplanarer Ringsysteme wird dagegen den Beobachtungen gerecht (s. u. Figur S. 209).

Sehr wesentlich für die Größe des äußersten Elektronenringes ist die in 8) 8') auftretende Zahl n_k der Impulsquanten. Die Durchführung der Annahme $n_k = k$ („der $k$te Ring ist k-quantig"), welche SOMMERFELD aus Röntgenspektralmessungen für die beiden innersten Ringe vermutet, ergibt bei höheren Elementen des periodischen Systems viel zu große Atomradien und damit viel zu große Gitterkonstanten δ. In unserer zitierten Arbeit war beispielsweise die Vorstellung durchgeführt, daß der dritte Elektronenring von Chlor und Kalium dreiquantig sei; der Vergleich mit der Erfahrung zeigte die Unhaltbarkeit dieser Vorstellung. Noch ungleich stärker würde dieser Widerspruch werden, wenn man den Ansatz $n_k = k$ auf Elemente aus der vierten oder fünften Periode des Systems der Elemente, auf Br, J, Rb, Cs anwenden würde. Vielmehr bleibt man hier wie dort nur dadurch im Einklang mit der Erfahrung, wenn man den jeweiligen äußersten Ring zweiquantig läßt ($n_k = 2$) und auch die Elektronen der inneren Ringe demgemäß mit zwei Quanten ausstattet. In Übereinstimmung mit den erwähnten Röntgenspektren darf man übrigens



den innersten (ersten) Ring einquantig lassen, weil dadurch der δ-Wert bei höheren Elementen nicht wesentlich beeinflußt wird, und beim Lithium, wo der erste Ring gleichzeitig der äußerste ist, allein die Vorstellung $n_1 = 1$ zu einigermaßen richtigen δ-Werten führt. Wir wollen also im folgenden die Annahme durchführen, daß der erste Ring einquantig und alle folgenden zweiquantig sind.

Was die Anzahlen p_k der Elektronen in den verschiedenen Ringen k betrifft, so wird durch das periodische System das Schema $p_1 = 2$, $p_2 = 8$, $p_3 = 8$ nahegelegt. Die folgenden großen Perioden von 18 Elementen führen aus chemischen Gründen zu der Vermutung $p_4 = 10$, $p_5 = 8$, $p_6 = 10$, $p_7 = 8$. Wie gesagt, gibt dann komplanare Ringanordnung den beobachteten Gang von δ mit Hilfe der theoretischen Formel 6) gut wieder (s. unten Fig. 1). Nur beim Cs scheint die Komplanarität durchbrochen zu sein. Die Cs-Verbindungen zeigen empirisch etwas kleinere Gitterkonstanten als die Rb-Verbindungen, was sich dadurch erklären würde, daß einer der dem äußersten naheliegenden Ringe beim Cs die Orientierungen 7) oder 7') aufweist, so daß sein Beitrag zu den ringvergrößernden Konstanten A_k in 8) 10) fortfiele. Ohne daher behaupten zu wollen, daß die folgende Annahme beim Cs gerade der Wirklichkeit entspricht, ist beim Cs die Rechnung durchgeführt für den Fall, daß der fünfte (drittäußerste) Ring gemäß 7 oder 7') aus der Richtung (2) der übrigen Ringe herausgedreht ist. Auch bei den anderen behandelten Ionen ist eine solche Herausdrehung innerer Ringe nicht ausgeschlossen, denn je weiter innen ein Ring liegt, desto geringer ist nach 8') 10) der Einfluß seiner Orientierung auf die Größe des äußersten Ringes, und nur letztere Größe kann nach 6) an der Erfahrung nachgeprüft werden. Es liegt nahe, in solchen Verdrehungen innerer Ringe den Grund für die kristallographischen Unterschiede zu suchen, nach welchen die verschiedenen Halogen-Alkalisalze den verschiedenen Symmetrieklassen des regulären Kristallsystems zuzuordnen sind.

Wir gehen nun dazu über, eine Zusammenstellung der Elektronenzahlen p_k und reduzierten Radien $\alpha_k = a_k : a_0$ für die verschiedenen positiven Alkali- und negativen Halogenionen zu geben, welche mit Hilfe der Formeln 8') bis 10) mit $n_1 = 1$, $n_k = 2$ $(k > 1)$ berechnet sind unter Benutzung des Zahlenwertes $c_{jk} = {}^1/_2$



bei komplanaren Ringen gemäß 11). Nur beim Cs ist die Stellung des fünften (drittäußersten) Ringes nach 7) so angenommen, daß der zugehörige Faktor c_{jk} in der Beeinflussungskonstante A_k 10) verschwindet.

	Z	p_1	α_1	p_2	α_2	p_3	α_3	p_4	α_4	p_5	α_5	p_6	α_6	p_7	α_7
Li .	3	2	0,3638	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Na .	11	2	0,0930	8	0,649	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
K .	19	2	0,0534	8	0,278	8	0,754	—	—	—	—	—	—	—	—
Rb .	37	2	0,0272	8	0,1243	8	0,176	10	0,312	8	0,846	—	—	—	—
Cs .	55	2	0,073	8	0,080	8	0,095	10	0,150	8	0,166	10	0,313	8	0,840
F .	9	2	0,1141	8	0,959	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Cl .	17	2	0,0598	8	0,325	8	1,097	—	—	—	—	—	—	—	—
Br .	35	2	0,0286	8	0,1325	8	0,200	10	0,363	8	1,168	—	—	—	—
J . .	53	2	0,0019	8	0,0083	8	0,0099	10	0,1456	8	0,2315	10	0,410	8	1,292

Diese Angaben, in 6) eingesetzt, geben folgende Werte für $\delta \cdot 10^{+8}$ cm. Die eingeklammerten Zahlen bedeuten die beobachteten Werte, die sich mit Hilfe der Avogadroschen Zahl $N = 0{,}62 \cdot 10^{24}$ nach der Formel berechnen:

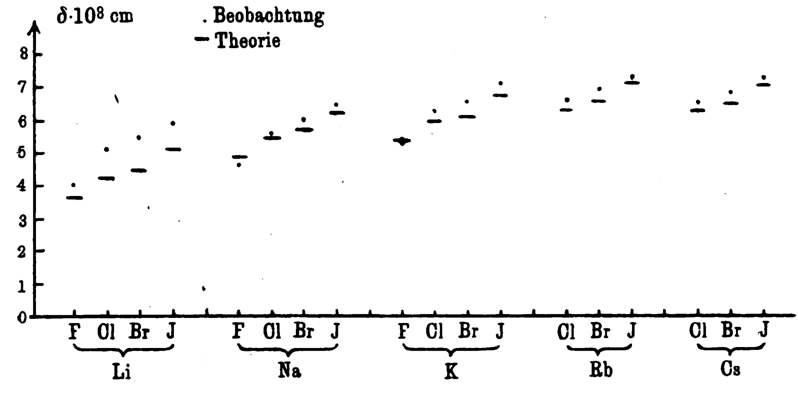
$$\delta^3 . N = 4 \frac{\mu_+ + \mu_-}{\varrho},$$

worin μ_+ und μ_- die Atomgewichte der Ionen, ϱ das spezifische Gewicht des Salzes ist.

	ber.	beob.		ber.	beob.		ber.	beob.		ber.	beob.
LiF	3,60	4,00	LiCl	4,19	5,11	LiBr	4,44	5,45	LiJ	5,09	5,95
NaF	4,86	4,60	NaCl	5,44	5,59	NaBr	5,64	5,98	NaJ	6,21	6,475
KF	5,34	5,31	KCl	5,90	6,24	KBr	6,09	6,59	KJ	6,69	7,05
—	—	—	RbCl	6,26	6,57	RbBr	6,58	6,88	RbJ	7,20	7,33
—	—	—	CsCl	6,24	6,53	CsBr	6,43	6,81	CsJ	7,03	7,23

Die berechneten Werte δ sind in der folgenden Figur als Striche, die beobachteten als Punkte eingetragen. Man erkennt, wie durch die Einführung komplanarer Ringe der richtige Gang der Gitterkonstanten erzielt wird und, abgesehen von den Li-Salzen, auch gute Übereinstimmung der absoluten Werte. Bei gemäß 7) gekreuzten Ringen hätte man bei allen Verbindungen (außer bei denjenigen des Li) denselben konstanten Wert für δ erhalten, im Widerspruch zur Erfahrung. Auch die Annahme, daß alle Ringe außer dem

ersten zweiquantig sind, bewährt sich gut; eine Änderung dieses Ansatzes $n_k = 2$ $(k > 1)$ würde gänzlich andere, von der Erfahrung weit abliegende Werte für die Gitterkonstante δ ergeben, jedenfalls wenn sich diese Änderung auf den jeweiligen äußersten Elektronenring eines Ions beziehen würde. Von den inneren Ringen dürften einige, ohne wesentlichen Einfluß auf δ, auch einquantig genommen werden, doch hat diese Freiheit wenig



Vorteil, weil ja ein Ring, der in einem höheren Element als innerer Ring auftritt, bei einem niederen Element selbst äußerer, also unbedingt zweiquantiger Ring ist. — Es sei noch bemerkt, daß die Berechnung der elastischen Kompressibilität der Halogen-Alkalisalze zu theoretischen Werten führt, welche rund doppelt so groß als die gemessenen sind. Während also die Theorie den absoluten Größendimensionen δ gerecht wird, gibt sie doppelt so weiche Körper als die Erfahrung. Auf diese Schwierigkeit soll in der folgenden Arbeit eingegangen werden.

Über die Berechnung der Kompressibilität regulärer Kristalle aus der Gittertheorie;

von M. Born und A. Landé.

(Eingegangen am 8. November 1918.)

Nachdem wir gezeigt haben[1]), daß sich die Gitterkonstanten der regulären Kristalle vom Typus des NaCl berechnen lassen, wenn man die Atome als BOHRsche Elektronenringsysteme mit bestimmten Achsenrichtungen annimmt, sind wir daran gegangen, die übrigen Kristalleigenschaften aus dieser Vorstellung abzuleiten. Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung der Kompressibilitäten; dabei hat sich nun, wie wir bereits am Schlusse unserer zitierten Abhandlung andeuteten, herausgestellt, daß die berechneten Kompressibilitäten gerade doppelt so groß herauskommen als die beobachteten. Die aus BOHRschen Atomen aufgebauten Kristalle sind also zu weich. Diese Tatsache erscheint uns sehr schwerwiegend aus dem Grunde, weil zu ihrer Ableitung keinerlei besondere Voraussetzungen über die Elektronenringe der Atome notwendig sind, sondern nur ein allgemeines Resultat über das Abstoßungsgesetz der Ringe, daß nämlich die potentielle Energie dieser Abstoßung mit hinreichender Näherung umgekehrt proportional der fünften Potenz der Gitterkonstanten δ ist.

Wir haben gezeigt, daß die potentielle Energie pro Elementarwürfel (mit genügender Näherung) die Form

$$\Phi = -\frac{a}{\delta} + \frac{b}{\delta^5}$$

hat, wo das erste Glied die elektrostatische (COULOMBsche) Anziehung der in ihren Mittelpunkten konzentriert gedachten Atomladungen und das zweite Glied die genannte Abstoßungswirkung der Elektronenringe darstellt.

---

[1]) M. BORN und A. LANDÉ, Sitzungsber. d. Königl. Preuß. Akademie d. Wissensch., 17. Okt. 1918, S. 1048. Vgl. auch die voranstehende Arbeit.

Anstatt nun mit diesem Gesetz die Kompressibilität zu berechnen und zu zeigen, daß sie dann um das Doppelte zu groß herauskommt, wollen wir von dem allgemeineren Ansatze[1])

$$\Phi = -\frac{a}{\delta} + \frac{b}{\delta^n} \qquad 1)$$

ausgehen und beweisen, daß der Wert $n = 5$ mit den beobachteten Kompressibilitäten unverträglich ist und durch $n = 9$ ersetzt werden muß. Die einfache Rechnung gestaltet sich folgendermaßen:

Die Gleichgewichtsbedingung lautet $\Phi = \text{Min.}$ oder

$$\Phi' = \frac{a}{\delta^2} - \frac{n b}{\delta^{n+1}} = 0. \qquad 2)$$

Hieraus haben wir früher unter der Annahme BOHRscher Atome ($n = 5$, a und b bekannt) den Gitterabstand δ_0 berechnet; wir wollen jetzt umgekehrt δ_0 als durch Beobachtungen bekannt ansehen und b aus 2) berechnen:

$$b = \frac{a}{n} \delta_0^{n-1}. \qquad 3)$$

Durch nochmaliges Differenzieren folgt aus 1) mit Berücksichtigung von 3):

$$\Phi'' = -\frac{2a}{\delta^3} + \frac{n(n+1)b}{\delta^{n+2}} = \frac{a}{\delta_0^3}(n-1).$$

Daher lautet die Reihenentwickelung der potentiellen Energie pro Elementarwürfel:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{a(n-1)}{\delta_0^3} \cdot \frac{(\delta - \delta_0)^2}{2} + \cdots$$

Die Änderung des Volumens dieses Würfels sei

$$\varDelta = \delta^3 - \delta_0^3 = 3\delta_0^2(\delta - \delta_0);$$

daher hat man bis auf Glieder von höherer als zweiter Ordnung

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{a(n-1)}{18\delta_0^7} \varDelta^2.$$

Daraus berechnet sich der Druck

$$p = -\frac{d\Phi}{d\varDelta} = -\frac{a(n-1)}{9\delta_0^7} \varDelta.$$

---

[1]) Einen Ansatz dieser Form hat auch Herr E. GRÜNEISEN seiner Theorie des festen Zustandes einatomiger Elemente [Ann. d. Phys. (4) **39**, 257, 1912] zugrunde gelegt; doch fehlt bei ihm die Vorstellung, daß die Anziehungen elektrostatischer Natur sind (Exponent -1 von δ), und damit die Möglichkeit exakter quantitativer Schlüsse.

Die Kompressibilität ist definiert durch

$$\varkappa = -\frac{1}{v}\frac{dv}{dp} = -\frac{1}{\delta_0^3}\frac{d\Delta}{dp};$$

mithin folgt

$$\varkappa = \frac{9\,\delta_0^4}{a(n-1)}. \qquad 4)$$

Die Berechnung der Konstanten a ist in unserer zitierten Arbeit durchgeführt; sie ist dort mit $\frac{1}{2}\Phi^{(-1)}$ bezeichnet. Nach der Methode von MADELUNG[1]) ergibt sich nämlich für die elektrostatische Energie aller Ionen eines Gitters vom Typus NaCl auf ein einzelnes, wenn der Abstand benachbarter, voneinander verschiedener Ionen gleich 1 gesetzt wird, der Wert[2])

$$-e^2.(1{,}386 + 0{,}225 + 0{,}131) = -e^2.1{,}742.$$

Als Elementarwürfel hat man nun einen solchen zu nehmen, dessen Kanten δ_0 parallel den Achsen von einem Ion zum nächsten gleichen Ion reichen und der von jeder Sorte vier Ionen enthält. Daher ist die potentielle Energie aller Ionen auf die eines Elementarwürfels

$$-\frac{8}{\delta_0/2}e^2.1{,}742 = -\frac{e^2}{\delta_0}\cdot 2\cdot 13{,}94.$$

Sind in der Volumeneinheit N Elementarwürfel, so erhält man die Energie der Volumeneinheit durch Multiplikation mit $\frac{N}{2}$, weil bei der Summation jedes Ionenpaar doppelt gezählt wird; die Energie der Volumeneinheit ist also

$$-\frac{e^2}{\delta_0}\cdot 13{,}94\cdot N,$$

und hieraus folgt durch Division mit N die Energie pro Elementarwürfel

$$-\frac{a}{\delta_0} = -\frac{13{,}94\,e^2}{\delta_0}.$$

Es ist also

$$a = 13{,}94\,e^2. \qquad 5)$$

[1]) E. MADELUNG, Phys. ZS. 19, 524, 1918.

[2]) Vgl. M. BORN u. A. LANDÉ, l. c., § 5, Ende, Formel 31. Vgl. auch das Beispiel bei MADELUNG, l. c., S. 531, dessen Gitterkonstante a gleich 2δ ist, wodurch der Zahlenwert doppelt so groß herauskommt. Bei BORN-LANDÉ, l. c. S. 1060, Zeile 11 ist der sinnentstellende Druckfehler δ in $\delta/2$ zu verbessern.

Die Gitterkonstante δ_0 berechnen wir aus der Dichte ϱ, den Atomgewichten μ_+ und μ_- der Ionen und der AVOGADROschen Zahl $N = 6{,}2 \,.\, 10^{23}$:

$$\delta_0 = \sqrt[3]{\frac{4(\mu_+ + \mu_-)}{N\varrho}} = 1{,}86 \,.\, 10^{-8} \sqrt[3]{\frac{\mu_+ + \mu_-}{\varrho}}. \qquad 6)$$

Dann erhalten wir mit $e = 4{,}76 \,.\, 10^{-10}$ elektrostatische Einheiten aus 4), 5), 6) zur Bestimmung von n:

$$n = 1 + 3{,}41 \,.\, 10^{-13} \frac{1}{\varkappa} \left(\frac{\mu_+ + \mu_-}{\varrho}\right)^{4/3}. \qquad 7)$$

Die Kompressibilität $\varkappa$ ist für 12 Halogensalze von RICHARDS und JONES[1]) gemessen worden; von diesen scheiden die Silbersalze hier aus, weil diese nach allen unseren Kenntnissen nicht kristallinisch, sondern amorph sind. Für die übrigen neun Salze gibt die folgende Tabelle die nach 7) zur Berechnung von n nötigen Daten sowie die daraus gewonnenen Werte von n:

	μ_+	μ_-	ϱ	$\varkappa_{beob.}$	n	$\varkappa_{ber.}$
Na Cl	23,0	35,5	2,17	$4{,}1 \,.\, 10^{-12}$	7,75	$3{,}46 \,.\, 10^{-12}$
Na Br	23,0	79,9	3,01	5,1	8,41	4,73
Na J	23,0	126,9	3,55	6,9	8,33	6,30
K Cl	39,1	35,5	1,98	5,0	9,62	5,36
K Br	39,1	79,9	2,70	6,2	9,56	6,64
K J	39,1	126,9	3,07	8,6	9,10	8,68
Tl Cl	204,0	35,5	7,02	4,7	9,00	4,69
Tl Br	204,0	79,9	7,54	5,1	9,43	5,36
Tl J	204,0	126,9	7,056	6,7	9,60	6,76

Der Mittelwert der so berechneten n-Werte ist 8,76; das widerspricht dem Werte $n = 5$, der sich aus der Annahme BOHRscher Elektronenringe ergeben hat. Die nächste ganze Zahl ist

$$n = 9.$$

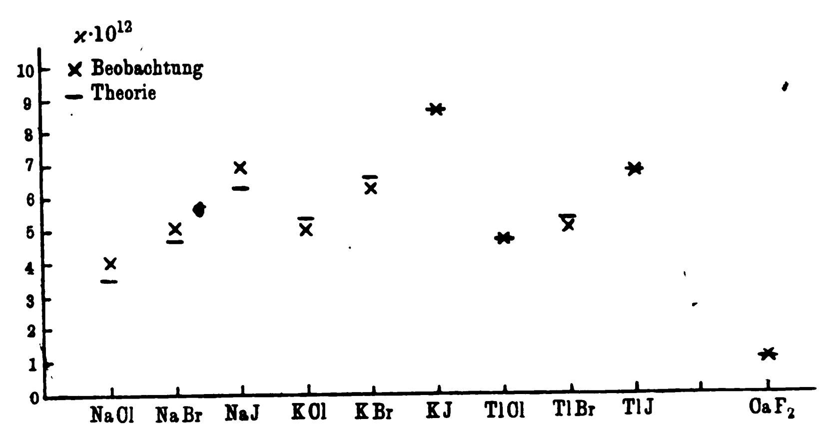
Mit diesem Werte sind die in der letzten Kolonne zusammengestellten Werte von $\varkappa$ berechnet, nämlich nach der aus 7) folgenden Formel

$$\varkappa = 4{,}26 \,.\, 10^{-14} \left(\frac{\mu_+ + \mu_-}{\varrho}\right)^{4/3}. \qquad 8)$$

[1]) TH. W. RICHARDS und GR. JONES, Journ. Amer. Chem. Soc. **31**, 158, 1909. Wir entnehmen die Zahlenangaben von $\varkappa$ der kritischen Zusammenstellung von W. VOIGT in seinem Lehrbuch der Kristallphysik, § 362, S. 720.

Die Figur veranschaulicht die Übereinstimmung, die man im Hinblick auf die Schwierigkeit der Kompressibilitätsmessungen als recht gut bezeichnen muß.

In die Figur sind außerdem noch die Werte von $\varkappa_{\text{ber.}}$ und $\varkappa_{\text{beob.}}$ für Flußspat CaF_2 eingetragen. Das Gitter dieses Kristalls ist von den bisher behandelten gänzlich verschieden. Der Elementar-



würfel, dessen Kante δ_0 parallel der Achse von einem Ca-Atom zum benachbarten reicht, enthält vier Ca-Atome und acht F-Atome, so daß

$$\delta_0 = \sqrt[3]{\frac{4(\mu_+ + 2\mu_-)}{N\varrho}} = 1{,}86 \,.\, 10^{-8} \sqrt[3]{\frac{\mu_+ + 2\mu_-}{\varrho}}$$

ist. Die Konstante a hat der eine von uns (A. LANDÉ) berechnet und wird darüber gesondert berichten[1]); sie hat den von 5) ganz verschiedenen Wert

$$a = 38{,}7\, e^2.$$

Daraus folgt für $\varkappa$ aus 4) mit $n = 9$, $\mu_+ = 40{,}1$, $\mu_- = 19$, $\varrho = 3{,}18$:

$$\varkappa_{\text{ber.}} = 1{,}54 \,.\, 10^{-14} \left(\frac{\mu_+ + 2\mu_-}{\varrho}\right)^{4/3} = 1{,}10 \,.\, 10^{-12}.$$

Der beobachtete Wert beträgt[2]):

$$\varkappa_{\text{beob.}} = 1{,}16 \,.\, 10^{-12};$$

die Übereinstimmung ist recht befriedigend[3]).

---

[1]) Vgl. die folgende Abhandlung.

[2]) Vgl. W. VOIGT, Kristallphysik, VII. Kapitel, § 372, S. 742.

[3]) Man kann die Formel 4) zur Berechnung der Elektronenladung e aus Dichte, Kompressibilität und Atomgewichten benutzen; für die 10 oben behandelten Kristalle ergibt sich als Mittelwert $e = 4{,}84 \,.\, 10^{-10}$ (anstatt $4{,}76 \,.\, 10^{-10}$), allerdings mit einem mittleren Fehler von etwa 10 Proz.

Hätte man $n = 5$ statt $n = 9$ genommen, so würde in der Formel 4) für $\varkappa$ der Faktor $n - 1$ im Nenner den Wert $5 - 1 = 4$ statt $9 - 1 = 8$ bekommen, $\varkappa$ also doppelt so groß ausfallen, wie wir schon oben gesagt haben.

Es scheint uns nun im Hinblick auf die Verwendbarkeit der BOHRschen Atommodelle zum Aufbau der Kristallgitter von Wichtigkeit, ganz klar zu stellen, ob die Schlüsse, die zur Verwerfung des Exponenten 5 und zur Annahme des Exponenten 9 geführt haben, tatsächlich zwingend sind. Wir stellen daher die notwendigen Voraussetzungen nochmals zusammen:

1. Die Struktur des Kristallgitters. Diese ist durch die Röntgenaufnahmen wohl als völlig gesichert zu betrachten. Aus den neueren Untersuchungen von DEBYE und SCHERRER[1]) folgt überdies mit Hilfe von Messungen der Intensitätsverhältnisse der Interferenzflecke, daß sämtliche zu einem Atom gehörigen Elektronen auf engem Raume um den Kern konzentriert sind, derart, daß das Verhältnis des Durchmessers dieses Raumes zur Gitterkonstanten von der Größenordnung 1 : 10 ist.

2. Die Atome tragen die der Valenz entsprechende Anzahl von einfachen Ladungen $e = 4{,}76 \cdot 10^{-10}$. Das wird einmal durch das Vorhandensein von Reststrahlen und die quantitativen Beziehungen zwischen Reststrahlfrequenz und ultrarotem Brechungsindex bewiesen[2]); sodann haben auch DEBYE u. SCHERRER (in der eben zitierten Abhandlung, § 2) durch Intensitätsmessungen der Interferenzflecke von Röntgenstrahlen den direkten Nachweis der einfachen Ladungen für den Kristall LiF erbracht.

3. Außer dem durch Ladungen verursachten Kontraktionsbestreben $-a\delta^{-1}$ besteht ein Expansionsbestreben $b\delta^{-n}$ und sonst keine wesentliche Kraft. Man könnte daran denken, daß außer der COULOMBschen noch eine elektrodynamische Anziehung der rotierenden Elektronenringe in Betracht käme; eine solche würde jedoch einer höheren Potenz von δ^{-1} proportional sein und ist neben der COULOMBschen Wirkung zu vernachlässigen[3]).

---

[1]) P. DEBYE und P. SCHERRER, Phys. ZS. **19**, 474, 1918; vgl. insbesondere § 3, S. 480.

[2]) Vgl. W. DEHLINGER, Phys. ZS. **15**, 276, 1914; M. BORN, Sitzungsber. d. Königl. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1918, S. 604 und Phys. ZS. **19**, 539, 1918.

[3]) Anders ist es bei neutralen Atomen, wo die COULOMBsche Anziehung fehlt und die niedrigste Potenz von δ^{-1} im Ausdrucke des Potentials von den elektrodynamischen Wirkungen herrührt.

Das wird auch durch den Befund direkt bestätigt, daß die Kompressibilität des Flußspats $Ca F_2$ bei unserer Rechnung richtig herauskommt; denn dieses Ergebnis beruht wesentlich darauf, daß das Kontraktionsbestreben durch die Coulombsche Anziehung dieses charakteristischen Gitters richtig wiedergegeben wird [1]).

Es scheint uns, daß gegen diese drei Voraussetzungen keine Einwände erhoben werden können, und damit wäre das Ergebnis $n = 9$ gesichert.

Dies widerspricht nun unseren früheren Ansätzen, bei denen die abstoßende Kraft auf die Wirkung der Elektronenringe zurückgeführt wurde. Die von uns auf Grund der ebenen Ringe gefundene gute Übereinstimmung der Gitterkonstanten mit den Beobachtungen können wir nicht als so zwingend anerkennen, wie die voranstehenden Überlegungen [2]). Wir sehen auch keine Möglichkeit, wie man etwa durch andere Anordnung der Ringe zu einem höheren Exponenten als 5 kommen könnte. Der hohe Exponent 9 läßt sich so deuten, daß die Elektronen des einzelnen Atoms nach den Richtungen des Raumes gleichmäßig verteilt sind, nicht in ebenen Scheiben. Damit erhebt sich für die Quantentheorie eine neue Aufgabe; die ebenen Elektronenbahnen genügen nicht, die Atome sind offenbar räumliche Gebilde. Dieser Schluß scheint uns ebenso gewichtig, wie die Ergebnisse der Forschung über die Spektren der Röntgenstrahlen, und trotz der Erfolge, die dort mit den ebenen Ringsystemen erzielt sind, müssen wir eine Erweiterung der Theorie im genannten Sinne verlangen.

Einige Überlegungen in dieser Richtung werden wir demnächst mitteilen.

---

[1]) Daß die Glieder mit δ^{-5} und δ^{-7} nicht genau Null sind, ist theoretisch wahrscheinlich; auch deuten die Abweichungen der $\varkappa$-Werte, besonders bei den Na-Salzen, darauf hin.

[2]) Daß die aus Elektronenringsystemen aufgebauten Kristalle zu weich werden, haben wir noch auf anderem Wege geprüft; wir haben nämlich die Reststrahlfrequenzen berechnet und viel zu langsame Schwingungen gefunden.

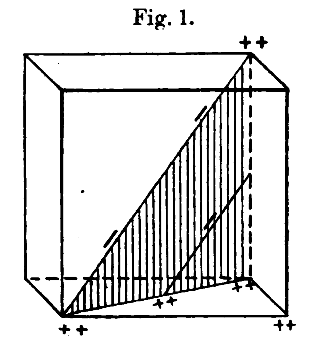
Das elektrostatische Potential des Flussspatgitters; *von A. Landé.*

(Eingegangen am 8. November 1918.)

Die Eigenschaften mehratomiger Kristalle sind wesentlich bedingt durch das elektrostatische Potential der punktförmig gedachten Ionen aufeinander. Besonders die Theorie der Kompressibilität[1]) fordert, neben dem Potential der kubischen Gitter vom NaCl-Typus, auch für kompliziertere Typen regulärer Gitter den Wert des elektrostatischen Ionenpotentials zu berechnen, z. B. für den Flußspat.

Das Raumgitter des Flußspats CaF_2 baut sich aus doppelt geladenen Ca-Ionen (++) und einfach geladenen F-Ionen (—) folgendermaßen auf. Die (++) sitzen in den Würfelecken und Seitenmitten eines kubischen Gitters, die (—) auf den vier langen Hauptdiagonalen, je um $^1/_4$ der Diagonalenlänge von den Würfelecken entfernt (Fig. 1). Nimmt man als Längeneinheit den Abstand von einem (++) zum nächsten (—); so hat der Elementarkubus δ^3 die Kantenlänge $\delta = 4/\sqrt{3}$ und enthält 4 (++) Ionen und 8 (—) Ionen. Um das elektrostatische Potential Φ aller Ionen des unendlichen Kristalls auf die 12 Ionen eines Elementarkubus zu erhalten, braucht man nur das Potential auf irgendein Tripel (—) (++) (—) zu berechnen und mit 4 zu multiplizieren:

Fig. 1.



$$\Phi = 4(\overset{++}{\varphi} + 2\overset{-}{\varphi}).$$

Nach der Methode von E. MADELUNG[2]) setzt sich $\overset{++}{\varphi} + 2\overset{-}{\varphi}$ aus drei Teilen zusammen, aus Punkt-, Linien- und Ebnenpotentialen

$$\overset{++}{\varphi} + 2\overset{-}{\varphi} = (\overset{++}{\varphi_P} + 2\overset{-}{\varphi_P}) + (\overset{++}{\varphi_L} + 2\overset{-}{\varphi_L}) + (\overset{++}{\varphi_E} + 2\overset{-}{\varphi_E}),$$

welche jetzt einzeln vorgenommen werden sollen.

---

[1]) Vgl. die vorstehende Arbeit von M. BORN und A. LANDÉ.

[2]) E. MADELUNG, Phys. ZS. 19, 524 1918.

§ 1. Punktpotential. Die Ionen auf einer langen Diagonale des Gitters sind folgendermaßen angeordnet:

(—)(++)(—) · (—)(++)(—) · (—)(++)(—) · (—)(++)(—) ·

Jedes (++) ist im Abstand 1 von zwei (—) eingerahmt, während der Abstand von einem (—) zum nächsten (—) den Betrag 2 hat. Nach einer Strecke $Z = 4$ wiederholt sich die gleiche Anordnung, $Z = 4$ ist Grundperiode auf der langen Diagonale. Ein (—)-Ion erfährt von den rechts- und linksliegenden Ionen, nach $1/r$ geordnet, die Potentialsumme

$$\overset{-}{\varphi}_P = -\left(\frac{+2}{1} + 2\frac{-1}{2} + \frac{+2}{3} + 2\frac{-1}{4} + \cdots\right)$$
$$= -2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) = -2\,ln\,2.$$

Ein doppelt geladenes (++)-Ion erfährt dagegen von rechts und links her aus gleichem Abstand die gleichen Potentiale, im ganzen die Potentialsumme:

$$\overset{++}{\varphi}_P = +2\cdot 2\left(\frac{-1}{1} + \frac{-1}{3} + \frac{+2}{4} + \frac{-1}{5} + \frac{-1}{7} + \frac{+2}{8} + \frac{-1}{9} + \cdots\right)$$
$$= 4\left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \cdots\right)$$
$$= 4\left[\left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \cdots\right)\right]$$
$$= -4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = -6\,ln\,2.$$

Daher wird das Potential auf drei Ionen (—), (++), (—) gleich

$$\overset{++}{\varphi}_P + 2\,\overset{-}{\varphi} = -10\,ln\,2 = -6{,}931 \qquad 1)$$

herrührend von den Ionen derjenigen langen Diagonale, zu welcher (—), (++), (—) selbst gehören. Diese Diagonale ist aber nur eine einzige Gitterlinie aus einer Reihe anderer paralleler Gitterlinien, welche zusammen eine Gitterebene bilden, z. B. die in Fig. 1 schraffierte Ebene durch eine lange und eine kurze Diagonale des kubischen Gitters. Das Potential der anderen Gitterlinien dieser Ebene auf die drei Ionen (—), (++), (—) soll jetzt berechnet werden.

§ 2. Linienpotential. Ein Stück der in Fig. 1 schraffierten Gitterebene ist in Fig. 2 nochmals hingezeichnet. Die Gitterlinien parallel der langen Diagonale folgen einander im Abstand $r = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

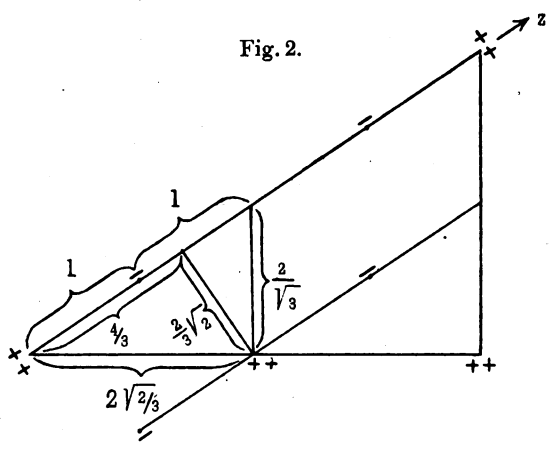


Nimmt man eine lange Diagonale zur z-Achse mit einem $(++)$-Ion als Nullpunkt, so erzeugen ihre mit der Periode $Z = 4$ sich wiederholenden Gitterpunkte nach MADELUNG ein Potentialfeld, welches im Abstand r von der z-Achse in einem Punkte (r, z) gegeben ist durch die rasch konvergente Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\, c_n \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(i\,\nu_n\, r) \,.\, \cos(\nu_n z), \qquad \nu_n = \frac{2\pi n}{Z}. \qquad 2)$$

Darin bedeutet $H_0^{(1)}$ die nullte HANKELsche Funktion 1. Art, welche z. B. in den Tabellen von JAHNKE und EMDE tabuliert ist; die Konstanten c_n in 2) sind auf folgende Weise bestimmt. Faßt

Fig. 2.



man die Punktbelegung der Diagonale als Grenzfall einer kontinuierlichen Belegung σ auf, welche ebenfalls die Periode $Z = 4$ hat, so gilt

$$c_0 = \frac{1}{Z}\int_Z \sigma\, d\, z, \qquad c_n = \frac{2}{Z}\int_Z \sigma \cdot \cos(\nu_n z)\, d\, z. \qquad 2')$$

Man findet im vorliegenden Falle

$$\left.\begin{array}{l} c_n = 0 \text{ für } n = 0,\ 4,\ 8,\ \ldots\ c_n = 1 \text{ für } n = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots \\ \qquad c_n = 2 \text{ für } n = 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ \ldots \end{array}\right\} \qquad 3)$$

In der benachbarten Gitterlinie haben nun ein Ion $(++)$ und zwei Ionen $(-)$ die Koordinaten (Fig. 2)

$$r = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \overset{++}{z} = \tfrac{4}{3}, \qquad \overset{-}{z} = \tfrac{4}{3} \pm 1.$$

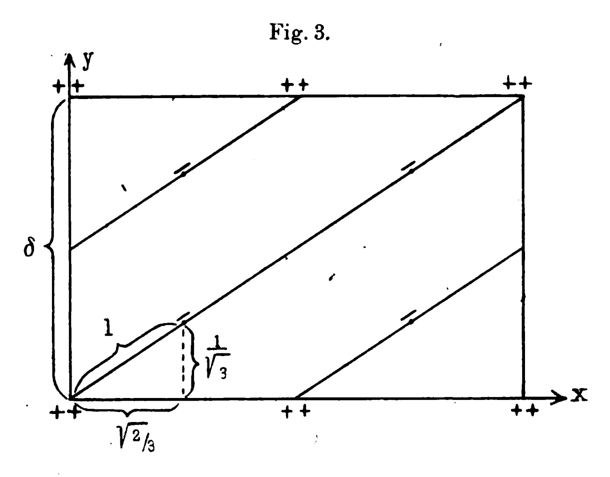
Sie erfahren also von der z-Achse $r = 0$ her ein Potential, welches man durch Einsetzen dieser Koordinaten in 2) bekommt,

und die erhaltenen Werte für das (++)-Ion mit +2, für die (—)-Ionen je mit —1 multipliziert. Da im Abstand $r = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ von den drei Ionen beiderseits je eine gleiche Gitterlinie liegt, hat man noch mit 2 zu multiplizieren, um das Potential auf (—), (++), (—), herrührend von dem nächstbenachbarten Gitterlinienpaar, zu erhalten. Führt man die gleiche Rechnung für das folgende Gitterlinienpaar durch, relativ zu dem die Ionen (—), (++), (—) die Koordinaten

$$r = 2\cdot\tfrac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \overset{++}{z} = \tfrac{8}{3}, \qquad \overset{-}{z} = \tfrac{8}{3} \pm 1$$

haben, so zeigt sich, daß dieses Gitterlinienpaar nur noch einen sehr kleinen Beitrag zum Potential auf (—), (++), (—) liefert. Die weiter entfernten Gitterlinien geben dann nur noch zu vernachlässigende Beiträge.

Fig. 3.



nachlässigende Beiträge. Auch die Reihe 2) konvergiert so gut, daß man sie bereits nach $n = 2$ abbrechen darf. Man erhält dann im ganzen als Potential aller Gitterlinien der in Fig. 1 schraffierten Ebene auf die drei Ionen (—), (++), (—) den Wert

$$\overset{++}{\varphi}_L + 2\,\overset{-}{\varphi}_L = -1{,}605, \tag{4}$$

worin aber die Beiträge der bereits in 1) berücksichtigten Ionen der Linie (—)(++)(—) selber nicht inbegriffen sind.

§ 3. Ebenenpotential. Außer den Punkten der Gitterebene, in welcher die drei Ionen (—), (++), (—) selber liegen, wirken

noch die sämtlichen parallelen Gitterebenen auf die drei Ionen. Die in Fig. 1 schraffierte Ebene hat im Abstand $2 . \sqrt{2/3}$ eine gleichwertige Parallelebene, deren Gitterpunkte durch senkrechte Projektion aus der ersteren Ebene hervorgehen. In Fig. 3 ist ein Stück einer solchen Gitterebene ebenso wie in Fig. 2 aufgezeichnet, mit dem Unterschied, daß in Fig. 2 eine lange Diagonale als z-Richtung und die darauf senkrechte, in der Ebene selbst liegende Richtung als r-Koordinate benutzt wurde, während in Fig. 3 eine kurze Diagonale und eine Würfelkante als x- und y-Koordinatenachse auftritt, und senkrecht zu dieser xy-Ebene die Richtung z gerechnet wird. In Fig. 3 ist speziell ein rechteckiges Grundperiodenstück mit den Seiten $X = 4\sqrt{2/3}$, $Y = 4\sqrt{1/3}$ aufgezeichnet, durch dessen Wiederholung die ganze Gitterebene $z = 0$ entsteht. Diese Gitterebene erzeugt nach MADELUNG ein mit der Periode $X = 4\sqrt{2/3}$, $Y = 4\sqrt{1/3}$ periodisches Potential, dargestellt durch die rasch konvergierende Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\, c_{mn}\, \pi \cdot \frac{e^{-\sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2} \cdot |z|}}{\sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2}} \cos(\mu_m x) \cos(\nu_n y), \qquad \mu_m = \frac{2\pi m}{X}, \quad \nu_n = \frac{2\pi n}{Y} \tag{5}$$

Die Konstanten c_{mn} sind darin auf folgende Weise bestimmt. Faßt man die Punktbelegung der Gitterebene Fig. 3 als Grenzfall einer kontinuierlichen Belegung σ auf, welche sich mit der Periode $X . Y$ wiederholt, so gilt

$$\left.\begin{aligned} c_{00} &= \frac{1}{XY} \int_X \int_Y \sigma\, dx\, dy, \\ c_{0n} &= \frac{2}{XY} \int_X \int_Y \sigma \cos(\nu_n y) dy, \\ c_{m0} &= \frac{2}{XY} \int_X \int_Y \sigma \cos(\mu_m x)\, dx\, dy, \\ c_{mn} &= \frac{4}{XY} \int_X \int_Y \sigma \cos(\mu_m x) \cos(\nu_n y)\, dx\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Im vorliegenden Falle wird speziell

$$c_{00} = 0, \quad c_{10} = 0, \quad c_{01} = 3/\sqrt{8}, \quad c_{11} = 0, \quad c_{20} = 3/\sqrt{2} = c_{02} \text{ usw.}$$

In einer benachbarten Ebene $z = 2\sqrt{^2/_3}$ (und auch in allen weiteren Parallelebenen) haben nun drei Ionen (—), (++), (—) die xy-Koordinaten $\overset{++}{x} = 0 = \overset{++}{y}$, $\overset{-}{x} = \pm\sqrt{^2/_3}$, $\overset{-}{y} = +1/\sqrt{3}$. Die drei Ionen erfahren also von der benachbarten Ebene her ein Potential, welches man erhält, indem man diese Koordinaten in 5) einsetzt und die betreffenden Werte für das (++)-Ion mit +2, für die (—)-Ionen je mit (—1) multipliziert. Da im Abstand $|z| = 2\sqrt{^2/_3}$ über und unter den drei Ionen je eine gleiche Ebene liegt, hat man noch mit 2 zu multiplizieren, um das Potential des benachbarten Ebenenpaares auf die drei Ionen zu erhalten. Die entsprechende Rechnung für das folgende Ebenenpaar im Abstand $z = 4.\sqrt{^2/_3}$ führt bereits zu einem so kleinen Beitrag, daß man ihn fortlassen kann. Auch in der Reihe 5) kann man sich auf wenige Glieder beschränken. Als Gesamtpotential aller Parallelebenen auf die drei Ionen (—), (++), (—) erhält man den Wert

$$\overset{++}{\varphi}_E + 2\,\overset{-}{\varphi}_E = +\,0{,}1674, \tag{6}$$

in welchem die Beiträge derjenigen Ionen, welche mit den drei Ionen in einer Ebene Fig. 3 liegen und bereits in 1) und 4) berücksichtigt sind, nicht inbegriffen sind.

Im ganzen wird also nach 1), 4), 6) das Potential aller Ionen des unendlichen Kristalls auf drei Ionen (—), (++), (—) gleich

$$\overset{++}{\varphi} + 2\,\overset{-}{\varphi} = -\,6{,}931 - 1{,}605 + 0{,}1674 = -\,8{,}369$$

für die Würfelkante $\delta = 4/\sqrt{3}$ und die Ladungen $(++) = 2$, $(—) = -1$. Für die Ladungen $(++) = 2e$ und $(—) = -e$ wird daher das Potential auf die viermal drei Ionen des Elementarkubus δ^3 gleich

$$-\,8{,}369 \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 4 \cdot e^2 = \frac{-77{,}31\,e^2}{\delta}, \tag{7}$$

die potentielle Energie des Elementarwürfels δ^3 also halb[1]) so groß; dabei ist die Voraussetzung gemacht, daß die Ionen als Punktladungen behandelt werden dürfen. Anderenfalls kommt

[1]) M. Born, Dynamik der Kristallgitter, Leipzig 1915.

zu der potentiellen Energie Φ noch ein Korrektionsglied hinzu, also

$$\left.\begin{array}{l} \Phi = -\frac{a}{\delta} + \frac{b}{\delta^n} \qquad \text{mit} \\ a = 38{,}655\, e^2 \text{ bei } CaF_2. \end{array}\right\} \qquad 8)$$

Zum Vergleich sei der Wert von a für kubische Ionengitter vom NaCl-Typus mitgeteilt[1]). Nennt man hier δ den Abstand von einem Na längs einer Würfelkante zum folgenden Na, so wird

$$a = 13{,}935\, e^2 \text{ bei } NaCl,\ KCl \text{ usw.}$$

[1]) E. Madelung, l. c., M. Born und A. Landé, Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wiss. 1918, S. 1048, § 5.

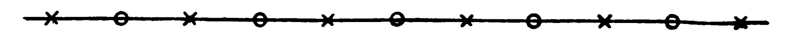


Über die Berechnung der absoluten Kristalldimensionen;
von M. Born.

(Eingegangen am 3. Dezember 1918.)

Seitdem man in den Bohrschen Elektronenringsystemen brauchbare Atommodelle besitzt, hat man versucht, Kristallgitter aus solchen aufzubauen. Dabei begegnet man, wie ich sowohl aus eigener Erfahrung als auch durch Mitteilung von Fachgenossen weiß, einer formalen Schwierigkeit, die man am besten mit Hilfe eines „eindimensionalen Kristalles", d. h. einer geradlinigen, periodischen Reihe von Massenpunkten, kennzeichnen kann.

Möge diese etwa aus zwei Arten von Punkten bestehen (in der Figur durch Kreuze und Kreise bezeichnet), die sich ab-



wechseln und voneinander gleichen Abstand haben; dann lehrt der Augenschein, daß zu jeder Kraftwirkung, die ein Punkt von einem anderen erfährt, eine entgegengesetzte Kraft von dem symmetrisch gelegenen Punkte gehört, die die erste gerade aufhebt. Mithin ist jeder einzelne Punkt aus bloßen Gründen der Symmetrie von selber im Gleichgewicht, wie auch der Abstand zweier benachbarter Punkte gewählt wird. Diese Überlegung gilt nur für die unendliche Punktreihe; wenn diese abbricht, so werden die Randpunkte unter besonderen Bedingungen stehen. Es scheint danach, als wenn die absolute Dimension einer solchen Punktreihe durch die Angabe des Kraftgesetzes zwischen irgend zwei Punkten nicht bestimmt wird, es sei denn, daß die Unsymmetrie am Rande zu einer Bedingung für den Elementarabstand führt.

Genau das Entsprechende gilt natürlich für dreidimensionale Gitter, wenn sie so aufgebaut sind, daß zu jedem Atom die übrigen in symmetrisch gelegene Paare sich ordnen; das ist z. B. bei dem bekannten Gittertypus des NaCl der Fall. Es scheint danach auf den ersten Blick unmöglich, die absolute Gitterkonstante aus den Atomkräften zu berechnen, wenn man nicht die besonderen Verhältnisse am Rande in Rechnung setzt; und dann erhebt sich die

Frage, wie es kommt, daß doch die Dichte der Kristalle von der Beschaffenheit der Oberfläche praktisch unabhängig ist.

In Wirklichkeit ist diese Schwierigkeit nur scheinbar. Für den Fall regulärer Kristalle vom Typus des NaCl haben A. LANDÉ und ich[1]) gezeigt, wie man zu einer Bedingungsgleichung für die Gitterkonstante δ ohne Berücksichtigung des Randes gelangen kann. Wir haben nämlich für eine solche Anordnung der Atome, die nach Symmetrie im Gleichgewicht ist, und für ein beliebiges δ die potentielle Energie Φ berechnet, die von allen Atomen des Kristalles auf die Atome eines inneren Elementarwürfels ausgeübt wird; diese wird eine Funktion von δ, $\Phi(\delta)$. Sieht man nun von den besonderen Umständen an der Begrenzung ab, so wird die gesamte Energie eines aus N Elementarwürfeln bestehenden Kristalles gleich $\frac{1}{2} N\Phi(\delta)$ sein, also $\frac{1}{2}\Phi(\delta)$ die Energie pro Elementarwürfel; und wenn in diesem die Masse m enthalten ist, so wird die Energie der Masseneinheit $\frac{1}{2m}\Phi(\delta)$. Man wird nun verlangen müssen, daß diese „spezifische Energie" oder die Funktion Φ im Gleichgewicht ein Minimum ist; daraus erhält man die Gleichung $\Phi'(\delta) = 0$ zur Bestimmung von δ.

Dieses Prinzip läuft also darauf heraus, an Stelle der Forderung minimaler Gesamtenergie zu verlangen, daß die Energie der Masseneinheit des unendlich groß gedachten Kristalles ein Minimum sei. Es leuchtet ein, daß beide Forderungen um so besser übereinstimmende Resultate liefern müssen, je größer die Lineardimensionen des Kristalles gegen die Reichweite der Molekularkräfte sind, weil mit wachsender Ausdehnung des Kristalles die Wirkung der Oberflächenschichten relativ immer mehr zurücktritt. Man kann für den Fall einer aus gleichen Punkten bestehenden Kette, bei der nur benachbarte Punkte merklich aufeinander wirken, die Äquivalenz der beiden Minimalforderungen streng nachweisen.

Seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Koordinaten der n Punkte der Reihe, $\varphi(x_{k+1} - x_k)$ die potentielle Energie der beiden Nachbarn x_k und x_{k+1}; dann ist die Gesamtenergie

$$U = \varphi(x_2 - x_1) + \varphi(x_3 - x_2) + \cdots + \varphi(x_n - x_{n-1}),$$

[1]) M. BORN und A. LANDÉ, Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss., 17. Okt. 1918, Nr. 45, S. 1048.



und Gleichgewicht besteht, wenn die n Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r}\varphi'(x_2-x_1)=0,\\ \varphi'(x_2-x_1)-\varphi'(x_3-x_2)=0,\\ \varphi'(x_3-x_2)-\varphi'(x_4-x_3)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi'(x_{n-1}-x_{n-2})-\varphi'(x_n-x_{n-1})=0,\\ \varphi'(x_n-x_{n-1})=0\end{array}\right\}$$

erfüllt sind. Durch sukzessives Einsetzen erkennt man, daß

$$\varphi'(x_2-x_1)=0,\quad \varphi'(x_3-x_2)=0,\quad \ldots\quad \varphi'(x_n-x_{n-1})=0$$

ist; die Abstände $x_{k+1}-x_k$ werden also sämtlich gleich δ, und es gilt $\varphi'(\delta)=0$. Andererseits ist die Energie der Wirkungen aller Punkte auf einen Elementarbereich, d. h. auf einen einzelnen inneren Punkt x_k, gleich

$$\Phi=\varphi(x_{k+1}-x_k)+\varphi(x_k-x_{k-1})=2\varphi(\delta),$$

die spezifische Energie also $\frac{1}{2m}\Phi=\frac{1}{m}\varphi(\delta)$; das Minimum dieser liefert wieder die zuvor streng abgeleitete Gleichung $\varphi'(\delta)=0$. An diesem Beispiel sieht man, wie sich die Randwirkung gewissermaßen ins Innere fortpflanzt.

Es entsteht nun die Frage, ob dieses Prinzip $\Phi=$ Min. für ganz beliebige Gitter gerade eine genügende Anzahl von Bedingungsgleichungen liefert, um die Konstanten des Gitters festzulegen. Wir wollen im folgenden zeigen, daß das in der Tat der Fall ist.

Das Gitter bestehe aus mehreren (s) ineinander geschobenen einfachen Gittern[1]), die durch die Indizes $k=1, 2, \ldots s$ unterschieden werden. Die Partikel (Atome und Elektronen) betrachten wir als punktförmig.

Wir fassen nun zwei Gitterpunkte ins Auge, von denen der eine im Elementarparallelepiped $l=0$, $m=0$, $n=0$ liegen, also die Indizes $(0, 0, 0, k')$ haben möge, während die des anderen (l, m, n, k) seien; der Vektor von dem ersten Punkte nach dem zweiten sei $\mathfrak{r}_l^{(k,k')}$ mit den Komponenten $x_l^{(k,k')}$, $y_l^{(k,k')}$, $z_l^{(k,k')}$.

---

[1]) Ich benutze im folgenden die in meinem Buche Dynamik der Kristallgitter (Leipzig, B. G. Teubner, 1915) gebrauchten Begriffe und Bezeichnungen; nur unterdrücke ich den Dimensionsfaktor δ und schreibe anstatt der drei Indizes l, m, n, welche die Punkte eines einfachen Gitters unterscheiden, den einen Index l.

Sodann nehmen wir an, daß ihre Wechselwirkung ein Potential $\varphi_l^{(k,k')}$ [ausführlich geschrieben: $\varphi_{l,m,n}^{(k,k')}$] habe. Dann ist die potentielle Energie der Wirkung aller Partikel auf die eines Elementarparallelepipeds

$$\Phi = \sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l \, \varphi_l^{(k,k')}; \tag{1}$$

der Akzent am Summenzeichen bedeutet, daß die Glieder $k = k'$, $l = m = n = 0$ fortzulassen sind.

Wenn nun die Gitterpunkte kleine Verrückungen $u_l^{(k)}$, $v_l^{(k)}$, $w_l^{(k)}$ erleiden, so kann man Φ nach diesen entwickeln und erhält:

$$\Phi = \Phi_0 + \sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l \left\{ \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial x_l^{(k,k')}} (u_l^{(k)} - u_0^{(k')}) + \cdots \right\} + \cdots \tag{2}$$

Zwischen den Koeffizienten der linearen Glieder bestehen Beziehungen wegen des Umstandes, daß die potentielle Energie bei einer starren Bewegung (Translation und Rotation) des ganzen Gitters ungeändert bleiben muß. Es gibt drei linear unabhängige Translationen:

$$\begin{aligned} u_l^{(k)} &= 1, \quad \text{bzw. } 0, \quad \text{bzw. } 0, \\ v_l^{(k)} &= 0, \qquad\quad 1, \qquad\quad 0, \\ w_l^{(k)} &= 0, \qquad\quad 0, \qquad\quad 1, \end{aligned}$$

und drei linear unabhängige Rotationen:

$$\begin{aligned} u_l^{(k)} &= \quad 0, \quad \text{bzw.} \quad z_l^{(k)}, \quad \text{bzw.} \; -y_l^{(k)}, \\ v_l^{(k)} &= -z_l^{(k)}, \qquad 0, \qquad\qquad x_l^{(k)}, \\ w_l^{(k)} &= \quad y_l^{(k)}, \qquad -x_l^{(k)}, \qquad\quad 0. \end{aligned}$$

Setzt man diese in (2) ein, so liefert das Verschwinden der linearen Glieder die sechs Relationen:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial x_l^{(k,k')}} = 0, \ldots \\ &\sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l \left(y_l^{(k,k')} \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial z_l^{(k,k')}} - z_l^{(k,k')} \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial y_l^{(k,k')}} \right) = 0, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Wir wenden jetzt unser Prinzip an, daß im Gleichgewicht die Funktion Φ ein Minimum haben soll gegenüber allen homogenen Verzerrungen. Diese werden durch die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} &u_l^{(k)} = u_k + u_x x_l^{(k)} + u_y y_l^{(k)} + u_z z_l^{(k)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

dargestellt; setzt man sie in (2) ein, so erhält man (mit Rücksicht auf $x_l^{(k',k)} = -x_l^{(k,k')}, \ldots$):

$$\Phi = \Phi_0 + 2\sum_k \left\{ u_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial x_l^{(k,k')}} + \cdots \right\}$$
$$+ u_x \sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l x_l^{(k,k')} \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial x_l^{(k,k')}} + u_y \sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l y_l^{(k,k')} \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial x_l^{(k,k')}} + \cdots$$

Das Minimum fordert das Verschwinden der Koeffizienten von $u_1, v_1, w_1, u_2, \ldots$ und von $u_x, \ldots w_z$, welche die Einzelkräfte und die Spannungen im natürlichen Zustande darstellen [1]); das liefert zunächst die $3s$ Gleichungen

$$\sum_{k'} \mathrm{S}'_l \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial x_l^{(k,k')}} = 0, \ldots (k = 1, 2, \ldots s), \tag{5}$$

ferner die neun Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l x_l^{(k,k')} \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial x_l^{(k,k')}} = 0, \\ \sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l y_l^{(k,k')} \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial x_l^{(k,k')}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{6}$$

Wegen der Identitäten (3) sind aber von den $3s$ Gleichungen (5) nur $3(s-1)$ unabhängig und von den neun Gleichungen (6) nur sechs. Im ganzen erhält man also $3(s-1)+6 = 3(s+1)$ unabhängige Gleichgewichtsbedingungen.

Genau so groß ist aber auch die Anzahl der Bestimmungsstücke des Gitters. Denn dieses ist bezüglich irgendeines Koordinatensystems durch die $3s$ Koordinaten der s Punkte im Elementarparallelepiped und die dreimal drei Komponenten der Kantenvektoren dieses Parallelepipeds bestimmt; da aber die Lage des Koordinatensystems willkürlich ist, reduzieren sich diese $3s+9$ Größen um 6 auf $3s+3 = 3(s+1)$.

Die Gleichungen (5) und (6) werden eine endliche Anzahl Lösungen haben, die je einer möglichen Kristallform der Substanz entsprechen.

Es bleibt noch zu zeigen, wie sich die Gleichungen (5) und (6) für den Fall regulärer Gitter mit symmetrischer Verteilung der Partikel um jedes von ihnen (wie bei NaCl) auf die einfache Bestimmungsgleichung $\Phi'(\delta) = 0$ für die Gitterkonstante δ (gleich

[1]) Vgl. Enzyklopädie der math. Wiss. IV, 23. C. H. Müller u. A. Timpe, Grundgl. d. math. Elastizitätstheorie.

der dritten Wurzel aus dem Volumen des Elementarparallelepipeds) reduzieren. Für ein solches Gitter sind die Gleichungen (5) offenbar von selbst erfüllt; ebenso ist aus Symmetriegründen identisch

$$\sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l\, y_l^{(k,k')} \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial x_l^{(k,k')}} = 0, \ldots,$$

während

$$\sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l\, x_l^{(k,k')} \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial x_l^{(k,k')}} = \sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l\, y_l^{(k,k')} \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial y_l^{(k,k')}} = \sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l\, z_l^{(k,k')} \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial z_l^{(k,k')}}$$

ist. Daher kann man die Relationen (6) in die eine symmetrische Bedingung

$$\sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l \left(x_l^{(k,k')} \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial x_l^{(k,k')}} + y_l^{(k,k')} \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial y_l^{(k,k')}} + z_l^{(k,k')} \frac{\partial \varphi_l^{(k,k')}}{\partial z_l^{(k,k')}} \right) = 0 \tag{7}$$

zusammenfassen. Es sei nun

$$\varphi_l^{(k,k')} = \sum_h \overset{(h)\,(k,k')}{\varphi_l}, \tag{8}$$

wo $\overset{(h)\,(k,k')}{\varphi_l}$ eine homogene Funktion h-ten Grades in den Koordinaten bezeichnet. Dann wird nach dem EULERschen Satze aus (7)

$$\sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l \sum_h h \overset{(h)\,(k,k')}{\varphi_l} = 0. \tag{9}$$

Andererseits wird nach (1) und (8)

$$\Phi = \sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l \sum_h \overset{(h)\,(k,k')}{\varphi_l} = \sum_h \Phi^{(h)}, \tag{10}$$

wobei

$$\Phi^{(h)} = \sum_k \sum_{k'} \mathrm{S}'_l \overset{(h)\,(k,k')}{\varphi_l}$$

eine homogene Funktion h-ten Grades in δ ist; man kann also setzen

$$\Phi^{(h)} = \delta^h A^{(h)},$$

wo die $A^{(h)}$ numerische Konstanten sind. Daher schreiben sich die Gleichungen (9) und (10)

$$\sum_h h\, \Phi^{(h)} = \sum_h h\, \delta^h A^{(h)} = 0, \tag{9'}$$

$$\Phi = \sum_h \delta^h A^{(h)}. \tag{10'}$$

Die Bedingung (9′) bedeutet also nichts anderes als

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{d\delta} = \sum_h h\, \delta^{h-1} A^{(h)} = \delta^{-1} \sum_h h\, \delta^h A^{(h)} = 0,$$

w. z. b. w.

Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich anstellen, wenn man die Partikel des Gitters nicht als Massenpunkte, sondern mit VOIGT als starre Körper annimmt.

Über kubische Atommodelle;
von M. Born.

(Eingegangen am 16. Dezember 1918.)

§ 1. Die Würfelhypothese. Nach den BOHRschen Vorstellungen bestehen die Atome aus ebenen Elektronenringen, die um den positiven Kern kreisen. SOMMERFELD hat diese Theorie nach mehreren Seiten ausgebaut; er hat die Existenz der Ellipsenvereine erwiesen und die Wechselwirkung mehrerer konzentrischer, in derselben oder verschiedenen Ebenen gelegener Ringe berücksichtigt. Die Atommodelle haben sich bei der Erklärung der optischen und Röntgenspektren in erstaunlicher Weise bewährt.

Aber die BOHRschen Ringsysteme reichen zur Erklärung vieler wichtiger Atomeigenschaften nicht aus, und zwar liegt ihr wesentlicher Fehler darin, daß der einzelne Elektronenring axiale Symmetrie hat, während die wirklichen Atome auf Grund vieler beobachtbarer Eigenschaften räumliche Symmetrien ganz anderer Art zu haben scheinen.

Bei der Untersuchung der Frage, ob sich einfache reguläre Kristallgitter, wie NaCl, aus BOHRschen Ringsystemen aufbauen lassen[1]), hat sich zwar gezeigt, daß die Gitterkonstanten annähernd richtig herauskommen; aber die Kompressibilitäten ergeben sich viel zu groß. Dieses Ergebnis, das sich auf nur wenige und gut fundierte Voraussetzungen stützt, scheint mir so gewichtig, daß ich die aus ebenen Ringen aufgebauten Atommodelle für unhaltbar ansehen muß. Ich habe daher nach Abänderungen gesucht, wobei die zweifellos gesicherten Grundlagen der BOHRschen Theorie nicht verlassen werden dürfen.

Diese Überlegungen beschränken sich zunächst auf die Edelgase und die Ionen der Alkalimetalle und der Halogene, welche Kristallgitter des Typus NaCl bilden. Nach den Anschauungen von KOSSEL[2]) soll das Alkaliatom nach Abgabe eines Elektrons eine äußere Schale von 8 Elektronen haben und dadurch, bis

---

[1]) M. BORN und A. LANDÉ, Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1918, Nr. 45, S. 1048.

[2]) W. KOSSEL, Ann. d. Phys. (4) 49, 229, 1916.

auf die um ein Quant größere Kernladung, dem benachbarten Edelgasatom gleichen. Ebenso soll das Halogenatom nach Aufnahme eines Elektrons eine äußere Schale von 8 Elektronen haben und ebenfalls dem Edelgasatom, bis auf die um ein Quant kleinere Kernladung, ähnlich sein. Das Edelgasatom besitzt eben nach KOSSEL eine besonders hohe Stabilität, die mit der Zahl 8 der äußeren Elektronen zusammenhängen muß.

Diese Zahl 8 suggeriert nun die Vorstellung, daß die Elektronen der Edelgase, der Alkali- und Halogenionen in den Ecken eines Würfels angeordnet sind oder wenigstens Bahnen beschreiben, die die Symmetrie eines Würfels haben. Ich werde nun zunächst alle empirischen Argumente vorbringen, die diese Würfelhypothese stützen.

I. Das periodische System der Elemente. Die ersten beiden Perioden haben die Länge 8; das ist der Hauptgrund, warum KOSSEL den stabilen Edelgasatomen eine äußere Schale von 8 Elektronen zuschreibt.

Sollen nun die Atome ebene Ringsysteme sein, so ist kein Grund einzusehen, warum die Zahl 8 irgendwie ausgezeichnet ist. Man muß in diesem Falle die Existenz noch unbekannter Stabilitätsprinzipien der Quantentheorie annehmen, nach denen die Ringe von 8 Elektronen eine besondere Stabilität haben sollen.

Wenn aber die Elektronen im Atom räumlich angeordnet sind oder räumliche Bahnen beschreiben, so kann man wohl verstehen, daß der Würfel, gebildet aus 8 Elektronen (bzw. Bahnen mit Würfelsymmetrie), eine Vorzugsstellung hat.

II. Der Kohlenstoff. Auch die anderen regulären Figuren werden dann ausgezeichnete Eigenschaften haben. Das Kohlenstoffatom wird von den Chemikern immer als Tetraeder vorgestellt, und es ist nicht einzusehen, wie mit einem ebenen Ring von 4 Elektronen die Eigenschaften des C-Atoms erklärt werden könnten. Diese Überlegung führt mit zwingender Gewalt zur Annahme räumlicher Elektronenanordnungen. Wenn aber der Kohlenstoff ein Tetraeder ist, wird man, im periodischen System aufsteigend, bei Sauerstoff ein Oktaeder und beim Argon einen Würfel vermuten.

III. Das Kristallsystem. Die Salze der Alkalimetalle und Halogene kristallisieren im regulären System und haben, soweit sie mit Röntgenstrahlen untersucht sind, dasselbe Gitter wie NaCl.



Man hat nun zwar zeigen können [1]), daß sich solche Gitter aus ebenen Ringsystemen aufbauen lassen; aber man kann nicht verstehen, warum die Atome sich gerade in dieser Weise gruppieren und eine stabile Anordnung bilden. Auch hier müßte man wieder eine noch unbekannte Quantenregel heranziehen. Das Bestreben der Atome, sich zu regulären Gittern aneinander zu lagern, ist nur verständlich, wenn man schon den einzelnen Atomen reguläre Symmetrie zuweist; wenigstens müssen die Kräfte, mit denen ein Atom auf das andere wirkt, reguläre Symmetrie besitzen. Da nun die Kraftwirkung des Atoms hauptsächlich durch seine äußere Schale von 8 Elektronen bedingt ist, müssen diese in Bahnen von Würfelsymmetrie umlaufen.

IV. Die Kompressibilität. Ist δ die Gitterkonstante eines Kristalls vom Typus NaCl, so läßt sich die Dichte der potentiellen Energie näherungsweise in der Form [2])

$$\Phi = -\frac{a}{\delta} + \frac{b}{\delta^n}$$

darstellen, wobei man die Konstante a nach einer Methode von Madelung [3]) berechnen und die Konstante b mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung $\frac{d\Phi}{d\delta} = 0$ eliminieren kann. Der Exponent n des Abstoßungsterms ergibt sich dann aus der Kompressibilität, die der zweiten Ableitung von Φ nach δ umgekehrt proportional ist, und zwar findet man aus den Messungen ziemlich genau $n = 9$. Dagegen führt der theoretische Aufbau des Gitters aus Elektronenringen notwendig auf den Wert $n = 5$. Wie in der oben zitierten Arbeit gezeigt wurde, hat dieser Widerspruch ein sehr großes Gewicht, weil zur Berechnung von n aus den Beobachtungen nur wenige und sicher begründete Voraussetzungen nötig sind.

Wenn man nun die Frage stellt, wie die Elektronenanordnung um den Kern beschaffen sein muß, damit sich ein Abstoßungsterm mit dem Exponenten $n = 9$ einstellt, so wird man wieder auf den Würfel geführt. Ich werde im folgenden Paragraphen zeigen, daß die potentielle Energie zweier Würfel mit gleichen Ladungen in den Ecken und achtfacher Ladung im Mittelpunkt eine Entwickelung nach δ^{-1} hat, die mit δ^{-9} anhebt. Allerdings sind bei

---

[1]) M. Born und A. Landé, l. c.

[2]) Vgl. die voranstehende Arbeit von M. Born und A. Landé, S. 210.

[3]) E. Madelung, Phys. ZS. **19**, 524, 1918.

den Kristallionen die Ladungen der 8 Elektronen durch die (effektiven) Kernladungen nicht genau kompensiert, sondern diese betragen 7 bzw. 9 positive Quanten; hieraus resultiert eine zusätzliche potentielle Energie, deren Entwickelung mit δ^{-5} beginnt, aber als Differenzwirkung von Abstoßung und Anziehung nicht sehr in Betracht kommt. Jedenfalls zeigt sich deutlich, daß der durch die Kompressibilität geforderte Exponent 9 eng mit der Würfelstruktur des Atoms zusammenhängt; denn aus der unten gegebenen Ableitung geht hervor, daß für andere Elektronenanordnungen um den Kern stets niedere Anfangsexponenten als 9 auftreten müssen.

Durch die hier zusammengestellten Tatsachen schien mir die Würfelhypothese so gut gestützt, daß versucht werden mußte, ein entsprechendes Atommodell nach BOHRschen Grundsätzen zu konstruieren. Diese verlangen, daß das Zusammenfallen der positiven und negativen Ladungen ausschließlich durch Fliehkräfte verhindert wird. Nach Analogie mit dem Ellipsenverein könnte man vermuten, daß die Elektronen dauernd in den Ecken eines regulären Körpers bleiben und durch Rotationen und radiale Pulsationen dieses Systems die nötigen zentrifugalen Kräfte entstehen. Man überzeugt sich aber leicht, daß das nicht möglich ist, weil die elektrostatischen Anziehungen zentral, die Fliehkräfte aber axial gerichtet sind. Dagegen führt eine andere Analogie zu einer Verallgemeinerung des Ellipsenvereins. Bei diesem sind n Elektronen in jedem Augenblick äquidistant auf einem Kreise verteilt; diese Konfiguration geht in sich über, wenn man die n Operationen der Drehungsgruppe (zyklischen Gruppe) um die Achse des Ringes ausführt. Gerade darauf beruht es, daß durch die Bahn eines Elektrons der ganze Vorgang beschrieben ist. Nun gibt es aber außer den zyklischen Gruppen andere Gruppen von Deckoperationen (Drehungen und Spiegelungen), bei denen ein Punkt (der Kern) fest bleibt; diese Gruppen sind aus der Kristallographie wohl bekannt. Wenn nun in jedem Augenblick die Elektronen eine Konfiguration bilden, die durch die Operationen einer Gruppe in sich übergeht, so gilt dasselbe, was den Ellipsenverein auszeichnet: die Bahn eines Elektrons bestimmt das ganze System, man hat nur ein 1-Körperproblem zu lösen. Herrn A. LANDÉ ist es gelungen, die Bewegungsgleichungen eines solchen sym-

metrischen Systems von 4 bzw. 8 Elektronen aufzustellen; er wird darüber gesondert berichten. Ob diese Gebilde von tetraedischer bzw. kubischer Struktur die Eigenschaften des Kohlenstoffatoms und der oben erörterten Würfelatome wirklich darstellen, kann erst die genauere Untersuchung zeigen.

§ 2. Wechselwirkung zweier Elektronenwürfel. Wir wollen hier auf das in § 1 unter IV. angezeigte einfache statische Modell eines Würfelatoms näher eingehen. Dieses Modell soll aus 8 in den Ecken eines Würfels angebrachten Elektronen nebst Z-fach geladenem Kern im Mittelpunkt bestehen. Es leuchtet ein, daß ein Atom von Würfelsymmetrie, wie es auch sonst beschaffen sei, hinsichtlich der elektrostatischen Fernwirkung mit einem solchen geeignet dimensionierten Modell äquivalent sein wird.

Der Radius der dem Würfel umschriebenen Kugel sei a. In einem parallel zu den Kanten orientierten Koordinatensystem haben die Ecken ($i = 1, 2, \dots 8$) folgende Koordinaten:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{\sqrt{3}}{a} \cdot x_i$	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1
$\frac{\sqrt{3}}{a} \cdot y_i$	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1
$\frac{\sqrt{3}}{a} \cdot z_i$	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1

1)

Wir berechnen zunächst das elektrostatische Potential φ eines neutralen Würfels ($Z = 8$) auf einen äußeren Punkt (x, y, z) vom Zentralabstand r. Ist γ_i der Winkel zwischen den vom Nullpunkt nach der Ecke i und nach dem Aufpunkt gezogenen Strahlen, so wird

$$\varphi = \frac{8e}{r} - \sum_{i=1}^{8} \frac{e}{\sqrt{r^2 - 2ra\cos\gamma_i + a^2}}. \tag{2}$$

Wir entwickeln nach Potenzen von $\frac{a}{r}$; bedeutet $P_n(u)$ das Legendresche Polynom $n$ten Grades, so wird

$$\varphi = \frac{8e}{r} - \frac{e}{r} \sum_{i=1}^{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma_i),$$

oder umgeordnet

$$\varphi = -\frac{e}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \cdot \sum_{i=1}^{8} P_n(\cos \gamma_i). \qquad 3)$$

Nun ist

$$\cos \gamma_i = \frac{x x_i + y y_i + z z_i}{a r}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

und nimmt für gegenüberliegende Eckpunkte entgegengesetzte Werte an; folglich ist für ungerade n

$$\sum_{=1}^{8} P_n(\cos \gamma_i) = 0.$$

Auf Grund der Tabelle 1) findet man leicht

$$\sum_{i=1}^{4} \cos^2 \gamma_i = \sum_{i=5}^{8} \cos^2 \gamma_i = \frac{4}{3},$$

$$\sum_{i=1}^{4} \cos^4 \gamma_i = \sum_{i=5}^{8} \cos^4 \gamma_i = \frac{4}{9 r^4} \{3 r^4 - 2(x^4 + y^4 + z^4)\}.$$

Da nun

$$P_2(u) = \tfrac{1}{2}(3 u^2 - 1),$$
$$P_4(u) = \tfrac{1}{8}(35 u^4 - 30 u^2 + 3)$$

ist, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{8} P_2(\cos \gamma_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{8} P_4(\cos \gamma_i) = \frac{14}{9 r^4} \{3 r^4 - 5(x^4 + y^4 + z^4)\}.$$

Mithin lautet der Anfang der Reihe 3):

$$\varphi = \frac{14}{9} e a^4 \frac{5(x^4 + y^4 + z^4) - 3 r^4}{r^9} + \cdots \qquad 4)$$

Im folgenden werden wir uns auf das hingeschriebene Glied beschränken.

Wir wollen jetzt die wechselseitige potentielle Energie Φ zweier Würfel aufeinander berechnen. Der Radius und die Kernladung des ersten seien a, Z, die des zweiten a', Z'; R sei der Zentralabstand.

Man kann nun die Kernladungen geteilt denken in $8e$ und $(Z-8)e$ bzw. $8e$ und $(Z'-8)e$. Die ersten Teile bilden mit den 8 Elektronen zwei neutrale Würfel W und W', wie wir sie

eben betrachtet haben, mit den Potentialen φ bzw. φ'; die Restkerne $(Z-8)e$ und $(Z'-8)e$ bezeichnen wir mit K und K'. Dann läßt sich in entsprechender Weise die potentielle Energie in vier Teile teilen:

$$\Phi = \Phi_{KK'} + \Phi_{KW'} + \Phi_{WK'} + \Phi_{WW'}. \qquad 5)$$

Dabei ist

$$\Phi_{KK'} = \frac{e^2(Z-8)(Z'-8)}{R} \qquad 6)$$

die Energie der Restkernladungen;

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{KW'} &= e(Z-8)\,\varphi'_{K} \\ \Phi_{WK'} &= e(Z'-8)\,\varphi_{K'} \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

sind die Energien der Abstoßungen zwischen je einem neutralen Würfel und der Restkernladung des anderen; endlich ist $\Phi_{WW'}$ die Energie der Abstoßung zwischen zwei neutralen Würfeln.

Diese wollen wir zuerst betrachten und untersuchen, welches das erste nicht verschwindende Glied der Entwickelung nach R^{-1} ist, und zwar nur für den Fall paralleler Orientierung, wie es für die regulären Gitter zutrifft. Die Richtungskosinus der Zentrallinie gegen die Kanten des Würfels W seien α, β, γ. Die Richtungskosinus der vom Kern des anderen Würfels W' nach seinen Ecken gezogenen Strahlen seien ξ_i, η_i, ζ_i; sie sind gleich den durch die Tabelle 1) gegebenen Werten von $\frac{x_i}{a}, \frac{y_i}{a}, \frac{z_i}{a}$. Ferner setzen wir $\lambda = \frac{a'}{R}$.

Nun ist

$$\Phi_{WW'} = 8e\varphi(R\alpha, R\beta, R\gamma) - e\sum_{i=1}^{8}\varphi(R\alpha + a'\xi_i, R\beta + a'\eta_i, R\gamma + a'\zeta_i)$$

oder, da φ homogen von (-5)tem Grade ist:

$$\Phi_{WW'} = \frac{e}{R^5}\left\{8\varphi(\alpha,\beta,\gamma) - \sum_{i=1}^{8}\varphi(\alpha + \lambda\xi_i, \beta + \lambda\eta_i, \gamma + \lambda\zeta_i)\right\}. \qquad 8)$$

Wir entwickeln nun nach Potenzen von λ, wobei wir uns auf das erste, in 4) angeschriebene Glied von φ beschränken; wir setzen also

$$\varphi = \tfrac{14}{9}\, e a^4 . \psi . \chi, \qquad 9)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \psi &= 5(x^4 + y^4 + z^4) - 3(x^2 + y^2 + z^2)^2, \\ \chi &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{9}{2}}. \end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

Ersetzt man hier x durch $\alpha + \lambda \xi_i$ usw., so wird

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2\lambda v_i + \lambda^2, \tag{11}$$

wo

$$v_i = \alpha \xi_i + \beta \eta_i + \gamma \zeta_i. \tag{12}$$

Dann ergibt eine einfache Rechnung für die Koeffizienten der Entwickelung von $\psi_i = \psi(\alpha + \lambda \xi_i, \ldots)$,

$$\psi_i = \psi_i^{(0)} + \lambda \psi_i^{(1)} + \lambda^2 \psi_i^{(2)} + \lambda^3 \psi_i^{(3)} + \lambda^4 \psi_i^{(4)}, \tag{13}$$

die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_i^{(0)} &= 5(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) - 3, \\
\psi_i^{(1)} &= 4[5(\alpha^3 \xi_i + \beta^3 \eta_i + \gamma^3 \zeta_i) + 3 v_i], \\
\psi_i^{(2)} &= 6[5(\alpha^2 \xi_i^2 + \beta^2 \eta_i^2 + \gamma^2 \zeta_i^2) - 2 v_i^2 - 1], \\
\psi_i^{(3)} &= 4[5(\alpha \xi_i^3 + \beta \eta_i^3 + \gamma \zeta_i^3) + 3 v_i], \\
\psi_i^{(4)} &= 5(\xi_i^4 + \eta_i^4 + \zeta_i^4) - 3.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Die Entwickelung von χ ist ein spezieller Fall der folgenden[1]):

$$\left.\begin{aligned}
(1 - 2\lambda v + \lambda^2)^{-\left(r + \frac{1}{2}\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{r+\frac{1}{2}}(v) \lambda^n, \\
C_{n-r}^{r+\frac{1}{2}}(v) &= \frac{1}{1 \cdot 3 \ldots (2r-3)(2r-1)} \cdot \frac{d^r P_n(v)}{d v^r}.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Hieraus erhält man für $r = 4$ nach leichter Rechnung:

$$\chi_i = \chi_i^{(0)} + \chi_i^{(1)} \lambda + \chi_i^{(2)} \lambda^2 + \cdots, \tag{16}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
\chi_i^{(0)} &= 1, \\
\chi_i^{(1)} &= 9 v_i, \\
\chi_i^{(2)} &= \frac{9}{2}(11 v_i^2 - 1), \\
\chi_i^{(3)} &= \frac{99}{2} v_i \left(\frac{13 v_i^2}{3} - 1\right), \\
\chi_i^{(4)} &= \frac{99}{8}(65 v_i^4 - 26 v_i^2 + 1). \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Aus 13) und 16) bekommt man durch Multiplikation die Entwickelung

$$\psi_i \cdot \chi_i = c_i^{(0)} + c_i^{(1)} \lambda + c_i^{(2)} \lambda^2 + \cdots, \tag{18}$$

---

[1]) E. T. Whittaker, Modern Analysis (Cambridge Univ. Press 1902), Chap. X, § 133, p. 236.

mit den Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned} c_i^{(0)} &= \psi_i^{(0)} \chi_i^{(0)}, \\ c_i^{(1)} &= \psi_i^{(0)} \chi_i^{(1)} + \psi_i^{(1)} \chi_i^{(0)}, \\ c_i^{(2)} &= \psi_i^{(0)} \chi_i^{(2)} + \psi_i^{(1)} \chi_i^{(1)} + \psi_i^{(2)} \chi_i^{(1)}, \\ & \dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \qquad 19)$$

Dabei ist $c_i^{(0)} = 5(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) - 3 = c_0$ vom Index i unabhängig.

Setzt man 18) in 9) und dies wieder in 8) ein, so kommt

$$\Phi_{WW'} = \frac{14}{9} \frac{e^2 a^4}{R^5} \left\{ 8 c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{i=1}^{8} c_i^{(n)} \right\}. \qquad 20)$$

Nun ist, wie aus 14), 17) und 19) hervorgeht, $c_i^{(n)}$ für ungerade n eine homogene Funktion ungeraden Grades in ξ_i, η_i, ζ_i, nimmt also für gegenüberliegende Eckpunkte des Würfels W' entgegengesetzte Werte an; daher verschwinden die Koeffizienten der ungeraden Potenzen von λ. Mithin lautet der Anfang der Entwickelung 20):

$$\Phi_{WW'} = -\frac{14}{9} \frac{e^2 a^4}{R^5} \left\{ \lambda^2 \sum_{i=1}^{8} c_i^{(2)} + \lambda^4 \sum_{i=1}^{8} c_i^{(4)} + \cdots \right\}. \qquad 21)$$

Man findet nach einiger Rechnung

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{8} c_i^{(2)} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{8} c_i^{(4)} &= -f(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned}\right\} \qquad 22)$$

Daher lautet die potentielle Energie der neutralen Würfel in erster Näherung

$$\Phi_{WW'} = \frac{14}{9} \frac{e^2 a^4 a'^4}{R^9} f(\alpha, \beta, \gamma). \qquad 23)$$

Ist ein Kristall vom Typus $NaCl$ aus solchen Würfeln aufgebaut, so trägt zu seiner Energie das Potential 23) ein Glied proportional δ^{-9} bei, womit die in § 1 unter IV. aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

Es bleibt noch zu überlegen, unter welchen Umständen die Energien $\Phi_{KW'}$ und $\Phi_{WK'}$, deren Entwickelung nach 4) und 7) mit R^{-5} beginnt, neben $\Phi_{WW'}$ wenig in Betracht kommen. Für

die Ionen eines Kristalls vom Typus NaCl ist $Z = 9$, $Z' = 7$, also $Z - 8 = 1$, $Z' - 8 = -1$; daher wird

$$\Phi_{KW'} + \Phi_{WK'} = e(\varphi'_K - \varphi_{K'})$$
$$= \frac{14}{9} \frac{e^2(a^4 - a'^4)}{R^5} \{5(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) - 3\}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $a = a'$.

Das Glied mit R^{-5} kommt um so weniger in Betracht, je weniger die Radien a und a' verschieden sind[1]).

---

[1]) Ein ausführliches Eingehen auf diese elektrostatischen Wirkungen erübrigt sich vorläufig, weil nach dem bekannten Satze von Earnshaw (Cl. Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, Oxford 1904, I, § 116, S. 174) elektrostatische Systeme niemals in stabilem Gleichgewicht sind. Hier wird wieder die Quantentheorie helfen müssen.

Die molekularen Eigenschaften des Glases bei höheren Temperaturen;

von H. Schulz.

(Mitteilung aus der optischen Anstalt C. P. Goerz, A.-G., Berlin-Friedenau.)

(Eingegangen am 12. Dezember 1918.)

I. Kritik der Grundlagen des Kühlproblems. In früheren Arbeiten [1]) über die bei der Kühlung des Glases auftretenden Spannungen ist auf die Schwierigkeiten der theoretischen Bearbeitung des Problems hingewiesen. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung der Wärmebewegung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \varkappa \Delta \vartheta, \qquad \text{a)}$$

welche den Ausgangspunkt für die Behandlung der Aufgabe darstellt, läßt sich zwar für einfach begrenzte Körper bei beliebiger zeitlicher Verteilung der Temperatur an den Grenzflächen des Körpers durch Zusammensetzung einfacher Lösungen von der Form

$$\sin px \sin qy \sin rz \; e^{-\varkappa (p^2 + q^2 + r^2) t} \qquad \text{b)}$$

angeben, doch stößt die Bestimmung der Konstanten auf große Schwierigkeiten, weil innerhalb des in Frage kommenden Temperaturgebietes die rein thermischen Konstanten in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur nicht hinreichend bekannt sind.

Für die innere und äußere Wärmeleitfähigkeit fester Körper liegen bei höheren Temperaturen überhaupt keine zusammenhängenden Beobachtungen vor. Die Wärmekapazität ist zwar durch die Untersuchungen von Nernst und Lindemann [2]) in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur festgestellt worden, und es ist ein Erfahrungsgesetz im Anschluß an die Einsteinsche Formel angegeben, welches den Verlauf der spezifischen Wärme bei veränderlicher Temperatur in guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen für bestimmte Körperklassen darstellt. Ob dieses Gesetz aber auch für das Verhalten des Glases bei höheren Temperaturen noch als gültig zu bezeichnen ist, erscheint zweifelhaft; das Verhalten der Gläser bei höheren Temperaturen läßt sich nicht un-

---

1) H. Schulz, Phys. ZS. **13**, 1017—1029, 1912; Zschimmer und Schulz, Ann. d. Phys. (4) **42**, 345—396, 1913.

2) W. Nernst, Theoretische Chemie, Stuttgart 1913, S. 258.

mittelbar mit dem einheitlicher fester Körper von bestimmt feststellbarer physikalischer und chemischer Beschaffenheit vergleichen.

Nach den bisher vorliegenden Erfahrungen dürfen die Gläser nicht schlechthin als feste Körper betrachtet werden, sondern als Lösungen von äußerst geringer molekularer Beweglichkeit. Da die Löslichkeiten außerordentlich stark von der Temperatur abhängig sind, ist bei veränderlicher Temperatur auch eine starke Veränderung der thermischen Konstanten gemäß dem Verhalten der einzelnen Komponenten zu erwarten. Bei höheren Temperaturen können selbst chemische Umwandlungen eintreten, ohne daß das äußere Bild des Glases sich ändert. An eine Darstellung des Zusammenhanges der Konstanten mit der Temperatur kann erst gedacht werden, wenn die physikalischen und chemischen Vorgänge bei Erhitzung einigermaßen geklärt sind. Das komplexe Verhalten der Gläser findet ja auch seinen Ausdruck darin, daß ein Schmelzen überhaupt nicht eintritt, daß vielmehr eine ganz allmähliche Erweichung zu beobachten ist und bereits vor der wirklichen Verflüssigung eine Änderung der Zusammensetzung, sei es durch Verdampfen einzelner Komponenten, sei es durch chemische Umwandlungen, eintritt.

Wenn also einerseits durch diese Schwierigkeiten eine strenge theoretische Behandlung der Aufgabe selbst unter vereinfachenden Bedingungen fast unmöglich wird, so gibt andererseits die Begrenzung des Problems auf dasjenige Temperaturgebiet, in dem chemische Änderungen noch nicht festzustellen sind, eine Vereinfachung, die die Hoffnung auf eine näherungsweise Bestimmung der Gesetzmäßigkeiten noch zuläßt. Es entsteht also die Frage, in welcher Weise die obere Temperaturgrenze festzulegen ist. Aus der Praxis heraus ist ebenfalls das Bedürfnis der Festlegung derartiger Temperaturpunkte aufgetaucht, und es sind verschiedene Wege eingeschlagen worden, eine solche „Grenztemperatur“ [1]) zu messen. Es wird zu diesem Zweck meist die Änderung irgendwelcher mechanischer Eigenschaften des Glases herangezogen, in der Voraussetzung, daß sich eine physikalische oder chemische molekulare Änderung durch eine entsprechende Änderung mechanischer Konstanten bemerkbar macht. Abgesehen vom SEGERschen Verfahren, welches auf der Feststellung einer durch das Eigen-

[1]) ZSCHIMMER, Zentralzeitung für Optik u. Mech. 38, Heft 10 u. ff., 1917.

gewicht bedingten molekularen Verschiebung beruht, gründen sich die meisten Verfahren auf die mittelbare oder unmittelbare Bestimmung von Kapillarkräften.

Das von ZSCHIMMER benutzte Verfahren zur Ermittelung einer Grenztemperatur, der „Kohäsionstemperatur", gibt insofern eine klare physikalische Definition, als die Gleichheit der Adhäsion und Kohäsion für zwei Glasstücke gleicher Beschaffenheit bei der zu bestimmenden Temperatur gefordert wird. Bei der Messung selbst treten jedoch Fehler auf, die nicht völlig ausgemerzt werden können. Die Gleichheit beider Kräfte wird dadurch festgestellt, daß das Zusammenkleben der Stücke beobachtet wird; hierzu ist eine bestimmte Zeit erforderlich, da selbst bei großer molekularer Beweglichkeit die Geschwindigkeiten der Moleküle endlich bleiben müssen. Die Definition muß also zunächst eine bestimmte, willkürlich zu wählende Zeitspanne angeben, in welcher das Ankleben der Stücke erfolgt sein soll. Ferner dürfte eine Beeinflussung der Oberflächenschichten durch die Politur und durch die bereits bei mäßigen Temperaturen stattfindende Entglasung auftreten. Diese Fehlerursachen sind selbst bei Bestimmung der „absoluten Kohäsionstemperatur" [1]) als vorhanden anzunehmen, bei der die Größe der „Anklebzeit" bereits ausgeschaltet ist.

Ein zweites, indirektes Verfahren zur Festlegung eines Festpunktes ist von mir an angegebener Stelle beschrieben worden. Es gründet sich auf die Messung der durch schnelle Abkühlung (Härtung) erzielten Spannung von Glasstücken bestimmter Form. Es wird also für die Bestimmung noch die Tatsache benutzt, daß bei der Abkühlung des Glases elastische Kräfte auftreten, die von der Temperaturdifferenz abhängig sind. Die theoretische Bestimmung dieser durch den Kühlprozeß erzeugten Spannungen ist nun naturgemäß noch schwerer möglich, als die des rein thermischen Vorganges, weil außer den thermischen Konstanten noch die elastischen in Frage kommen, für die sinngemäß das bereits oben Gesagte gilt. Aus diesen Gründen ist auch das von GRÜNEISEN [2]) bis zu höheren Temperaturen als geltend festgestellte Gesetz, nach welchem für den Ausdehnungskoeffizienten gilt:

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \alpha\, C_p, \qquad \text{c)}$$

---

[1]) E. ZSCHIMMER, Die Naturwissenschaften 2, 961, 1914.

[2]) GRÜNEISEN, Verh. d. D. Phys. Ges. 13, 426, 1911.

für Gläser nicht ohne weiteres anzunehmen, zumal, wie SCHOTT[1]) auf Grund von PULFRICHs Beobachtungen angeben konnte, der Ausdehnungskoeffizient wesentlich von dem Spannungszustande der Gläser beeinflußt wird, also bei der Abkühlung infolge der auftretenden Spannungen bereits Abweichungen von dem oben angegebenen, einfachen Gesetz sich ergeben müssen. Daß die Konstanten der Gläser überhaupt äußerst stark durch Spannungen beeinflußt werden, ergibt sich aus den Beobachtungen von REED[2]) und ZSCHOKKE[3]) über die Abhängigkeit der Brechungsindizes vom Spannungszustand.

Die Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls E von der Temperatur ist ebenfalls nur in den seltensten Fällen durch eine Gerade darstellbar. Zur Ermittelung des Elastizitätsmoduls E kann ein Erfahrungsgesetz von der Form

$$E_\vartheta = E_0 \{1 - \alpha(\vartheta - 20)^\beta\} \qquad \text{d)}$$

dienen, wobei für β bei verschiedenen Gläsern Werte zwischen 1 und 9 gefunden sind[4]).

Die Maximaltemperaturen lagen bei den Untersuchungen für die einzelnen Gläser zwischen 281° und 486°, also bei Werten, welche erfahrungsgemäß für das Kühlproblem noch als zu niedrig zu bezeichnen sind. Es zeigte sich aber auch bei diesen Versuchen, daß bei den verwendeten höchsten Temperaturen merkliche Erweichung eintrat, welche die Benutzung der getroffenen Versuchsanordnung bei diesen Temperaturen nicht mehr zuließ. Für höhere Temperaturen ist also gegebenenfalls noch mit einer anderen Form des Gesetzes zu rechnen. Überdies fehlt bei dieser Darstellung der Ergebnisse noch eine Korrektion, welche dem Einfluß der Ausdehnung Rechnung trägt und die nicht streng durchgeführt werden kann, weil die Kenntnis der Ausdehnungskoeffizienten für diese Temperaturen fehlt.

Es mag noch darauf hingewiesen werden, daß bei all diesen Untersuchungen eine Erschwerung der Auswertung noch darin liegt, daß beim Glase infolge seiner eigenartigen zähflüssigen Beschaffenheit die Kohäsionskräfte als recht erheblich zu betrachten sind[5]), wodurch die Ausdehnungskoeffizienten einerseits beeinflußt

---

[1]) O. SCHOTT, Vortrag im Verein zur Bef. d. Gewerbefleißes. 4. 4. 1892.
[2]) J. REED, Inaug.-Diss. Jena 1897.
[3]) W. ZSCHOKKE, ZS. f. Instrkde. **29**, 286—289, 1909.
[4]) A. WINKELMANN, Wied. Ann. **61**, 105—141, 1897.
[5]) H. SCHULZ, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 384—396, 1916.

werden, andererseits die Aufstellung der Grenzbedingungen sowohl für den thermischen als auch für den elastischen Vorgang zu ganz besonderen Annahmen zwingt.

Die Ergebnisse der Untersuchungen, welche sich mit dem Verhalten des Glases bei höheren Temperaturen befassen, bedürfen also einer besonders scharfen Beurteilung bezüglich der einzelnen Einflüsse. Eine vollkommene Klärung kann erst ein eingehendes Studium der physikalischen Eigenschaften plastischer Körper in ihren verschiedenen Übergangsstadien bis zur Verflüssigung — wenn solche überhaupt in Frage kommt — ergeben.

II. Kohäsions- und Erweichungstemperatur. Nach obigen Ausführungen muß es überraschen, daß die auf Grund der Härtungsspannungen ermittelten „Erweichungstemperaturen" in recht guter Übereinstimmung mit den „Kohäsionstemperaturen" sind. Der Grund hierfür ist darin zu erblicken, daß die beiden Methoden eigentlich die Molekularbeweglichkeit bei der zu bestimmenden Temperatur als Maßstab benutzen, und zwar im Falle der Ermittelung der Kohäsionstemperatur durch Umlagerung der Moleküle in der Grenzzone zweier Stücke gleicher Beschaffenheit, im Falle der Erweichungstemperaturen durch Ausgleich der Spannungskräfte infolge molekularer Bewegungen. Es läßt sich leicht erweisen, daß nur infolge des Ausgleichs der Spannungskräfte überhaupt dauernde Deformationen eintreten können, wenn man, von einem spannungsfreien Zustande und Temperaturgleichgewicht ausgehend, durch eine Reihe beliebiger Temperaturverteilungen wieder zur Temperaturgleichheit im Körper übergeht. Die bei der Kühlung des Körpers auftretenden Spannungen bilden also ein Maß der Molekularbeweglichkeit, wenn auch berücksichtigt werden muß, daß nicht nur die Anfangs- und Endtemperatur, sondern alle Zwischenwerte und die Art des Temperaturganges in den Spannungen sich ausdrückt. Bei der seinerzeit zur Ermittelung der Härtungsspannung benutzten Versuchsanordnung und der gewählten Form und Größe der Stücke ist aber als wesentlichste Bestimmungsgröße die Ausgangstemperatur zu betrachten, so daß praktisch wenigstens eine gewisse Übereinstimmung zwischen den nach beiden Verfahren erhaltenen Werten der Grenztemperatur zu erwarten ist, da die Spannungen sich mit großer Näherung proportional der Stückgröße ergeben haben [1]).

---

[1]) Zschimmer u. Schulz, l. c.



Die Gleichung, welche die Härtungstemperatur τ mit der Härtungsspannung S verknüpft, ist für Körper geringer Größe, bei welchen der Wärmeausgleich als so schnell erfolgend anzunehmen ist, daß ein merklicher Spannungsausgleich bei tieferen Temperaturstufen nicht zu erwarten ist, in der Form gegeben:

$$(\tau_0 - \tau)(S + S_0) = C, \qquad \text{e)}$$

wobei τ_0, S_0 und C für die gleiche Glasart als Konstanten zu betrachten sind, solange τ sich der Erweichungstemperatur nicht zu sehr nähert. Diese Gleichung, welche als Erfahrungsgesetz zu betrachten ist, würde schließen lassen, daß bei einer bestimmten Temperatur τ_0 die Restspannung S unendlich groß werden müßte. Dies ist naturgemäß unmöglich und es ist daher klar, daß die Gültigkeit der Gleichung auf ein mäßiges Temperaturgebiet beschränkt ist. In der Tat haben die Versuche gezeigt, daß die Restspannungen von einer bestimmten Größe der Härtungstemperatur τ an nahezu konstant bleiben; diese obere Grenze der Härtungstemperatur ist, wie die Versuchsergebnisse erwiesen haben, mit guter Näherung gleich der aus der Gleichung sich ergebenden Temperatur τ_0 zu setzen. Der Grund für das Gleichbleiben der Restspannung bei höheren Temperaturen ist darin zu suchen, daß bei diesen Temperaturen die Ausgleichszeit für endliche Spannungen, für welche die von Maxwell eingeführte Relaxationszeit als Maß dienen kann, so klein wird, daß sie von gleicher Größenordnung ist, wie die Abkühlungszeit selbst. Wird also die Relaxationszeit so klein, daß endliche Spannungen im Innern des Körpers sich sofort ausgleichen, so ist die Druckverteilung im Innern des Körpers also nur durch die dauernd neu sich erzeugenden Kapillarkräfte gegeben; eine Änderung der Spannungsverteilung kann bei der Abkühlung erst eintreten, wenn diejenige Temperaturgrenze erreicht wird, bei der für Drucke von der Größe der Kapillarkräfte eine längere Ausgleichszeit erforderlich ist, wenn also die bei höheren Temperaturen für die Spannungsverteilung unwesentlichen Temperaturdifferenzen im Innern des Körpers Spannungen erzeugen können. Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß die Kohäsionstemperatur praktisch mit der Erweichungstemperatur gleich ist, weil beide im wesentlichen durch das Wirken der Oberflächenkräfte bestimmt werden. Abweichungen können darauf zurückgeführt werden, daß in beiden Fällen die Werte durch Näherungsverfahren gewonnen werden. Wie bereits



erwähnt, ist bei Bestimmung der Kohäsionstemperatur die Einführung einer willkürlichen Anklebzeit erforderlich, die ZSCHIMMER auf 30 Minuten festsetzt, während die Erweichungstemperaturen durch Extrapolation gewonnen werden. Die folgende Zusammenstellung zeigt die Übereinstimmung der Werte für die am genauesten nach der Methode der Restspannungen untersuchten Bleigläser.

Glasart	Erweichungs-temperatur	Kohäsions-temperatur	Differenz
O. 198	469°	457°	+ 12°
O. 41	473°	465°	+ 8°
O. 102	494°	493°	+ 1°
O. 118	490°	486°	+ 4°
O. 340	485°	484°	+ 1°
O. 378	498°	505°	— 7°

Die Übereinstimmung ist als gut zu betrachten; für die übrigen Gläser ist teilweise eine größere Abweichung zwischen den von mir angegebenen Werten[1]) und den ZSCHIMMERschen Zahlen der Kohäsionstemperaturen festzustellen. Der Grund für diese wird klar, wenn man unter Benutzung der Werte der Kohäsionstemperaturen die angegebenen Härtungstemperaturen der Versuchsstücke einer Durchsicht unterzieht.

Bei allen Gläsern, bei denen eine hinreichend große Zahl von Versuchsstücken vorhanden war und bei denen die Härtungstemperaturen so gewählt worden waren, daß die Anwendung des Erfahrungsgesetzes e) ohne Einschränkung zulässig war, ergaben sich hinreichende Übereinstimmungen. Die Werte waren:

Glasart	Erweichungs-temperatur	Kohäsions-temperatur	Differenz	Anzahl der Versuchsstücke
O. 3453	511°	538°	– 27°	3
O. 3832	565°	583°	– 18°	3
O. 2122	681°	694°	– 13°	4
O. 463	640°	632°	+ 8°	3
O. 722	642°	632°	+ 10°	3
O. 3439	536°	536°	+ 0°	3
U. V. 3199	607°	581°	+ 26°	4

In der letzten Spalte ist die Zahl der zur Verfügung stehenden Glasstücke aufgeführt, deren Härtungstemperatur unterhalb der

[1]) H. SCHULZ, ZS. f. Instrkde. **33**, 205—209, 247—253, 1913.

von ZSCHIMMER angegebenen Kohäsionstemperatur lag. In Anbetracht des Umstandes, daß drei Stücke zur Bestimmung der Konstanten erforderlich sind, also ein Fehlerausgleich erst bei mehr als drei Stücken erfolgen kann, ist die Übereinstimmung hinreichend zu nennen und die Anwendung des Gesetzes bis in die Nähe der Erweichungstemperatur gerechtfertigt.

III. Theoretische Folgerungen. Da auf diese Weise auch die Hypothesen betreffend den Wert der einzelnen Einflüsse eine gewisse Wahrscheinlichkeit erhalten, kann man hoffen, unter einschränkenden Ausnahmen eine Näherungsformel theoretisch abzuleiten, bei welcher dann eine Deutungsmöglichkeit für die übrigen Konstanten besteht. Die infolge der Kühlung auftretenden Deformationen D in irgendeinem Punkte des Körpers, die als eine Funktion der Kapillarkräfte, also eine reine Funktion des Ortes, und als Funktion der Temperaturverteilung anzusehen sind, werden während der Zeit dt um den Betrag $\frac{dD}{dt}$ sich ändern. Die zeitliche Änderung der Spannung S im betrachteten Punkte wird also einerseits durch die Deformationsänderung, andererseits durch die Spannungsabnahme infolge der Relaxation bestimmt sein, so daß man setzen kann:

$$\frac{dS}{dt} = E \cdot \frac{dD}{dt} - \frac{S}{T}, \qquad \text{f)}$$

wobei sowohl der Elastizitätsmodul E, als auch die Relaxationszeit als Funktion der Temperatur zu betrachten sind[1]). Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist

$$S = e^{-\int \frac{dt}{T}} \left[C + \int E \frac{dD}{dt} e^{\int \frac{dt}{T}} dt \right]. \qquad \text{g)}$$

Die Spannungsverteilung in irgendeinem Punkte des Körpers ist also allgemein durch die elastischen und thermischen Größen bestimmbar. Zu einer näherungsweisen Darstellung der Größe der Spannung ist die Darstellung von T, E und D als Funktion der Zeit bzw. als Funktion der Temperatur erforderlich. Unter den einfachen Annahmen, die für die Gültigkeit des Erfahrungsgesetzes gemacht werden müssen, würde sich auf Grund des Ausdruckes g) ein Näherungswert ergeben:

$$(S + S_0) = Ce^{a\vartheta},$$

---

[1]) R. REIGER, Inaug.-Diss. Erlangen 1901, S. 10.

wobei S_0 durch die Abkühlungszeit, d. h. durch Körpergröße und Wärmeleitfähigkeit, und den Elastizitätsmodul bestimmt wird. Die Ermittelung der Erweichungstemperatur würde also hier, entsprechend der bei Bestimmung der Kohäsionstemperatur eingeführten Anklebzeit, noch eine neue Konstante erfordern, die hier als Grenzwert der Spannung zu betrachten ist und die nach der eingeführten Hypothese im Zusammenhang mit der Kapillarspannung[1]) steht, so daß nach Berechnung der Konstanten S_0, C und a die Erweichungstemperatur sich ergeben würde:

$$\vartheta_0 = \frac{1}{a} \, ln \left\{ \frac{\overline{S} + S_0}{C} \right\}.$$

Die theoretischen Betrachtungen führen also zu dem Schluß, daß auch bei der Benutzung der Härtungsspannungen zur Bestimmung der Erweichung noch eine willkürliche Annahme nötig ist, um den bei höheren Temperaturen auftretenden Grad der Molekularbeweglichkeit zu bezeichnen, und zwar ist streng genommen eine Bestimmungsgleichung aufzustellen, während man sich bei der Aufstellung der empirischen Beziehung mit der Bedingung begnügen konnte, daß die Relaxationszeit klein gegenüber der Abkühlungszeit sein muß.

Die auf Grund der Quantenhypothese von EINSTEIN abgeleitete Formel für die Energie eines Grammoleküls ist nun unabhängig von besonderen Vorstellungen über die Beschaffenheit des Körpers. Solange eine merkliche Änderung in der Zusammensetzung des Glases bei Erwärmung nicht auftritt, wird auch die EINSTEINsche Formel oder ein entsprechend erweiterter Ausdruck, der mehrere Frequenzen umfaßt, zur Darstellung der Energie geeignet sein. Je größer aber der Energieinhalt des Körpers ist, desto größer wird auch seine molekulare Beweglichkeit werden, so daß man zu der Annahme gelangt, daß innerhalb gewisser Grenzen die Relaxationszeit umgekehrt proportional dem Energieinhalt zu setzen ist. Nimmt man die einfachste Formel, so würde also folgen, daß für die Relaxationszeit T zu setzen ist:

$$T = \frac{A\left(e^{\frac{\beta\nu}{\vartheta}} - 1\right)}{3\,R\beta\nu}. \qquad \text{h)}$$

Es zeigt sich nun, daß für ein Glas, dessen Absorptionsstellen bei $20\,\mu$ und $0{,}2\,\mu$ gelegen sind, die Absorption bei kürzeren Wellen inner-

[1]) Eine andere Bestimmung ist auch bei Zurückführung auf die Zugspannung für das betreffende Glas möglich.

halb der möglichen Temperaturgrenzen keinen wesentlichen Einfluß auf die Relaxationszeit hat; die Größe der Relaxationszeiten bei Zimmertemperatur und 500° C etwa, sowie ihr ungefährer Verlauf läßt sich allein mit Hilfe der oberen Absorptionsstelle angeben.

Für die Erweichungstemperatur ist nun zu fordern, daß die Relaxationszeit eine geringe Größe $\varDelta$ hat. Dies würde besagen, daß $e^{\frac{\beta\nu}{\vartheta}} - 1$ klein ist, also auch $\frac{\beta\nu}{\vartheta}$ klein wird. Dann läßt sich also für höhere Temperaturen T darstellen in der Form

$$T = \frac{A}{3\,R\vartheta},$$

wobei also die Erweichungstemperatur durch die Bedingung

$$\varDelta = \frac{A}{3\,R\vartheta}; \quad \vartheta_0 = \frac{A}{3\,R\varDelta}$$

bestimmt ist, welche genauer dargestellt wird durch:

$$\vartheta_0 = \frac{\beta\nu}{ln\left\{1 + \frac{3\,R\beta\nu\varDelta}{A}\right\}}.$$

Bei einmaliger Annahme von $\varDelta$ läßt sich somit die Relaxationszeit mit Hilfe der durch Absorptionsmessungen zu ermittelnden Frequenz der Eigenschwingungen darstellen. Für gleiche Temperaturen wird also die Relaxationszeit zweier Gläser um so kleiner sein, je kleiner die Frequenz, je größer also die Wellenlänge der Eigenschwingung ist. Da nach den Versuchen von Rubens [1]) mit dem Wandern der ultraroten Absorption zu längeren Wellen im allgemeinen ein entsprechendes Wandern des ultravioletten Absorptionsgebietes verknüpft ist, so ergibt sich also, daß die Relaxationszeit bei ähnlich zusammengesetzten Gläsern um so kleiner, die Plastizität also um so größer ist, je näher die ultraviolette Absorptionsstelle dem sichtbaren Spektrum kommt. Die bisher vorliegenden Versuchsergebnisse an Bleigläsern bestätigen diese Folgerung. Wenn auch eine genaue zahlenmäßige Übereinstimmung nicht erwartet werden kann, so zeigt sich doch, daß auf diesem Wege näherungsweise Werte erhalten werden können und daß die Ermittelung der Absorption selbst bei niederen Temperaturen Anhaltspunkte für die Größe der Relaxationszeiten und der Grenztemperaturen zu geben imstande ist.

Im Felde, Mai 1918.

---

[1]) Rubens, Wied. Ann. **45**, 258, 1892.

Eine Ätherhypothese;

von G. Borelius.

(Eingegangen am 22. Oktober 1918.)

Es ist auf dem heutigen Standpunkt unseres Wissens durchaus wahrscheinlich, daß wir ohne bestimmte Annahmen über die Struktur des Äthers zu einer weiteren Reduktion der unabhängigen Konstanten der Atomlehre nicht hervordringen können. Eine atomistische Struktur des Äthers ist schon seit langem eine beliebte Idee. Ich möchte sie jetzt wieder zur Diskussion bringen, weil ich glaube, ihr einen quantitativen Erfolg zuschreiben zu können. Ich werde folgende Bezeichnungen und Zahlenwerte [1]) benutzen:

$c = 2{,}999 \,.\, 10^{10}$ Lichtgeschwindigkeit,
$\varepsilon = 4{,}774 \,.\, 10^{-10}$ E. S. E. Elementarladung,
$h = 6{,}547 \,.\, 10^{-27}$ Plancksches Wirkungsquantum,
$m = 0{,}902 \,.\, 10^{-27}$ Masse des Elektrons,
$M = 1{,}662 \,.\, 10^{-24}$ Masse des Wasserstoffatoms.

Wir denken uns den Äther als ein einfaches kubisches Kristallgitter, für dessen Bausteine, die Ätheratome, wir den Namen Ätheronen benutzen wollen. Auf den Kubikzentimeter gehen $N = 1 : a^3$ Ätheronen, wo a ihren Abstand angibt. Das Gitter sei mit Nullpunktstrahlung erfüllt [2]), auf jeder Eigenschwingung komme die Energie $h\nu$ (ν Schwingungszahl). In Übereinstimmung mit den Gesetzen, die nach Debye [3]) und Born und v. Kármán [4]) für das Kristallgitter des festen Körpers gelten, denken wir uns die Zahl der Schwingungen, die zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegen, durch $A\nu^2\,d\nu$ gegeben, wo A eine Konstante ist. Ebenso soll, wenn wir einfach annehmen, daß auch die schnellsten Schwin-

[1]) R. A. Millikan, Proc. Nat. Acad. Sc. **3**, 231, 1917. L. Flamm, Phys. ZS. **18**, 515, 1917.
[2]) Vgl. W. Nernst, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 83, 1916.
[3]) P. Debye, Ann. d. Phys. (4) **39**, 789, 1912.
[4]) M. Born und Th. v. Kármán, Phys. ZS. **13**, 297, 1912; **14**, 15 und 65, 1913.

gungen sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, die obere Grenze ν_0 von ν durch

$$\nu_0 = \frac{c}{2a} \tag{1}$$

bestimmt sein. Die Gesamtzahl der Eigenschwingungen pro Kubikzentimeter ist nach den genannten Autoren

$$3N = \int_0^{\nu_0} A\,\nu^2\,d\nu, \text{ woraus } A = \frac{9N}{\nu_0^3}.$$

Die Energiedichte berechnet sich zu

$$\int_0^{\nu_0} \frac{9N}{\nu_0^3}\,\nu^2\,h\nu\,d\nu = \frac{9}{4}\,Nh\nu_0.$$

Auf jedes Ätheron kommt somit die mittlere Energiemenge

$$u = \frac{9}{4}\,h\nu_0 = \frac{9}{8}\,\frac{hc}{a}. \tag{2}$$

Die Materie denken wir uns durch die einfachst mögliche Modifikation des Äthers entstanden. Hier und dort ist ein Ätheron aus seinem Platz im Gitter entfernt, was die Entstehung zweier Gebilde veranlaßt: einerseits einen Hohlraum im Äther, andererseits eine Verdichtung. Diese beiden Gebilde wollen wir mit dem Elektron und dem positiven Kern des Wasserstoffatoms identifizieren, und wir wollen ihnen deshalb auch in irgendeiner unbestimmten Weise Beweglichkeit im Ätheronengitter zuschreiben. Es läßt sich wohl denken, daß die beiden Gebilde zu Ausgangspunkten für radiale Verschiebungen von verschiedenen Zeichen (elektrostatische Felder) werden können. Von diesen Verschiebungen, über die wir ohne spezielle Annahmen über das Kraftgesetz zwischen den Ätheronen keine weiteren Aussagen machen können, wollen wir nur annehmen, daß sie sehr klein sind.

Einen mittleren Radius r des Hohlraumes (des Elektrons) können wir dann aus

$$\frac{4\pi r^3}{3} = (2a)^3 \text{ zu } r = a\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \tag{3}$$

berechnen. Da die Masse des Elektrons mit Oberflächenladung durch

$$m = \frac{2\varepsilon^2}{3rc^2} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}\,\frac{\varepsilon^2}{ac^2} \tag{4}$$

gegeben ist, finden wir

$$a = 1{,}48 . 10^{-13} \text{ cm.} \tag{4'}$$

In dem anderen Gebilde, das wir mit dem Kern des Wasserstoffatoms identifiziert haben, ist ein überschüssiges Ätheron vorhanden. Schreiben wir, was wohl als eine Annäherung zu betrachten ist, diesem Ätheron dieselbe mittlere Energie u wie den Ätheronen im unveränderten Gitter zu, so erhalten wir nach 2) für den Kern des Wasserstoffatoms die Masse

$$M = \frac{u}{c^2} = \frac{9}{8} \frac{h}{c\,a}, \tag{5}$$

woraus wir

$$a = 1{,}51 \, . \, 10^{-13} \text{ cm} \tag{5'}$$

finden, somit in vorzüglicher Übereinstimmung mit 4').

Mit $a = 1{,}50 . 10^{-13}$ cm berechnet sich dann die größte mögliche Schwingungszahl einer Ätherwelle nach 1) zu $\nu_0 = 10^{23}$, was nun in der Tat etwa tausendmal größer ist als das bis jetzt bei den Röntgenstrahlen gemessene Maximum. Die Dichte des Äthers berechnen wir nach 2) zu

$$\frac{N u}{c^2} = \frac{u}{a^3 c^2} = \frac{9 h}{8 a^4 c} = 4{,}8 . 10^{16} \text{ g/cm}^3.$$

Die durch die Übereinstimmung von 4') und 5') erhaltene Stütze unserer Hypothese wird vielleicht anschaulicher, wenn wir das Verhältnis $M : m$ berechnen, wobei a verschwindet. Wir bekommen aus 4) und 5)

$$\frac{M}{m} = \frac{27}{16} \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \cdot \frac{h c}{\varepsilon^2} = 1804,$$

während der empirische Wert zu 1843 angegeben wird.

Lund, Oktober 1918.

Notiz über die freien Schwingungen eines Punktes, dessen Differentialgleichung ein quadratisches Glied enthält;

von E. Budde.

(Eingegangen am 16. Oktober 1918.)

Schwingungsgleichungen mit quadratischem Glied spielen bekanntlich in der Theorie der Obertöne und Kombinationstöne eine hervorragende Rolle. Die einfachste Gleichung dieser Art aber, nämlich die Gleichung für die freie ungedämpfte Schwingung eines Massenpunktes μ von einem Freiheitsgrad, dessen Direktionskraft das Quadrat der Elongation enthält, ist meines Wissens noch nicht in solcher Weise behandelt worden, daß die Periode der Bewegung streng festgestellt wird. Das soll im folgenden geschehen. Ist x die Elongation, t die Zeit, so lautet die Schwingungsgleichung, wie bekannt,

$$x'' + p^2 x + q x^2 = 0, \tag{1}$$

wo p^2 und q reelle Konstanten sind. q kann positiv oder negativ sein; ist es negativ, so braucht man nur die Achse der x umzukehren, um es mit positivem Vorzeichen in die Gleichung eingehen zu lassen. Wir nehmen also willkürlich $q > 0$. Während p^2 die Dimension T^{-2} besitzt, ist $\dim q = L^{-1} T^{-2}$, also ist p^2 nicht direkt mit q, sondern mit einem Produkt aus q und einer Länge vergleichbar. Einer positiven Elongation entspricht unter unseren Voraussetzungen jederzeit eine negative Beschleunigung. Ist aber die Elongation negativ, etwa $-x_1$, so ist die Beschleunigung $p^2 x_1 - q x_1^2$. Ihre beiden Bestandteile stehen also miteinander im Gleichgewicht, wenn

$$x = -\frac{p^2}{q}. \tag{2}$$

Jenseits dieser Grenze hat die Beschleunigung das gleiche Vorzeichen wie die Elongation.

Die Beschleunigung hat offenbar ein Potential $\frac{p^2}{2} x^2 + \frac{q}{3} x^3$. Nehmen wir also als Anfangsbedingungen,

$$\text{zur Zeit Null sei } x' = 0, \qquad x = x_0 > 0, \tag{3}$$

so lautet das erste Integral von 1)

$$x'^2 = p^2 (x_0^2 - x^2) + \frac{2q}{3} (x_0^3 - x^3). \tag{4}$$

Setzt man die rechte Seite dieser Gleichung gleich Null, so erhält man nach Division mit $-\frac{2q}{3}$

$$x^3 + \frac{3p^2}{2q} x^2 - x_0^3 - \frac{3p^2}{2q} x_0^2 = 0. \tag{5}$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist offenbar $x = x_0$; dividiert man demgemäß das Polynom durch $x - x_0$, so bleibt

$$x^2 + \left(x_0 + \frac{3p^2}{2q}\right) x + \left(x_0 + \frac{3p^2}{2q}\right) x_0 = 0$$

oder, wenn man abkürzend

$$x_0 + \frac{3p^2}{2q} = g$$

setzt,

$$x^2 + gx + gx_0 = 0.$$

Die beiden anderen Lösungen sind demnach

$$x = -\frac{g \pm \sqrt{g^2 - 4gx_0}}{2}. \tag{6}$$

Für die Weiterbearbeitung ergeben sich also drei verschiedene Fälle, je nachdem $g^2 - 4gx_0$ positiv, Null oder negativ ist.

I. Wir betrachten zunächst den Grenzfall $g^2 - 4gx_0 = 0$. Setzt man für g seinen Wert ein, so erhält man

$$g - 4x_0 = 3\left(\frac{p^2}{2q} - x_0\right).$$

Der kritische Wert von x_0 ist also

$$x_0 = \frac{p^2}{2q},$$

das ist dem Absolutwert nach die Hälfte des oben in Gleichung 2) bezeichneten Wertes, für welchen die beiden Teile der Beschleunigung einander das Gleichgewicht halten. Für diesen Fall sind die Lösungen der Gleichung 5)

$$x_1 = x_0, \quad x_2 = x_3 = -2x_0;$$

also wird Gleichung 4)

$$x'^2 = -\frac{2q}{3} (x + 2x_0)^2 (x - x_0) \tag{7}$$

und damit

$$\sqrt{\frac{2q}{3}}\,dt = \frac{dx}{(x+2x_0)\sqrt{x_0-x}}. \tag{8}$$

Die einfache Integration dieser Gleichung ergibt

$$x = x_0\left[1-3\left(\frac{e^{pt}-1}{e^{pt}+1}\right)^2\right] \text{ mit } x_0 = \frac{p^2}{2q}. \tag{9}$$

In dem behandelten Grenzfall nimmt also die anfänglich gegebene Elongation kontinuierlich ab und erreicht für $t = \infty$ ihren Grenzwert $-2x_0$, also gerade die Endlage, in welcher die beiden Teile der Beschleunigung einander aufheben. Der Hergang hat eine gewisse Analogie mit dem Verhalten des Kreispendels in dem Falle, wo die anfänglich gegebene Energie gerade ausreicht, um den schwingenden Punkt in seine höchste Lage zu befördern; dort wie hier wird die Endlage nur asymptotisch erzielt.

II. Nach dem Vorstehenden ist ohne weiteres klar, daß die Bewegung von μ labil wird, wenn x_0 den kritischen Wert überschreitet; der Punkt μ geht dann ins (bei dem gewählten Vorzeichen von q negativ) Unendliche. Von den drei obigen Fällen interessiert uns also nur noch der erste, $x_0 < \frac{p^2}{2q}$, die Wurzeln der Gleichung 6) sind reell.

Setzt man

$$-\frac{g+\sqrt{g^2-4gx_0}}{2} = a_1, \quad -\frac{g-\sqrt{g^2-4gx_0}}{2} = a_2, \quad x_0 = a_3,$$

so wird aus Gleichung 4)

$$\frac{3}{2q}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3),$$

und die a sind der Größe nach geordnet; a_3 ist das größte. Es folgt

$$\sqrt{\frac{2q}{3}}\,dt = \frac{dx}{\sqrt{-(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}},$$

also mit der Anfangsbedingung, wonach $x = x_0$ für $t = 0$,

$$\sqrt{\frac{2q}{3}}\,t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{-(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}}. \tag{10}$$

Dabei ist $x - a_3$ stets negativ; reelle Werte von t sind also nur zu erwarten, solange $x - a_1$ und $x - a_2$ gleiche Vorzeichen haben, d. h. solange x zwischen a_2 und a_3 liegt.

Um das elliptische Integral zu reduzieren, setzen wir nach bekannter Vorschrift

$$x = \frac{r + sy}{1 + y}, \tag{11}$$

$$r = a_3 - \sqrt{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \quad s = a_3 + \sqrt{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)},$$

$$b_1 = -\frac{(r - a_1)(r - a_2)}{(s - a_1)(s - a_2)}, \quad b_2 = -\frac{r - a_3}{s - a_3} = 1,$$

$$B^2 = (s - a_1)(s - a_2)(s - a_3),$$

und erhalten dann

$$\sqrt{\frac{2q}{3}}\, t = (s - r) \int \frac{dy}{\sqrt{-B^2 (y^2 - b_1)(y^2 - b_2)}}.$$

Die Ausrechnung ergibt

$$\sqrt{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)} = \sqrt{2 g x_0 + x_0^2},$$

$$r = x_0 - \sqrt{2 g x_0 + x_0^2}, \quad s = x_0 + \sqrt{2 g x_0 + x_0^2},$$

$$s - r = 2\sqrt{2 g x_0 + x_0^2};$$

ferner findet sich

$$b_1 = \frac{(g + 2x_0)\sqrt{2 g x_0 + x_0^2} - 2(2 g x_0 + x_0^2)}{(g + 2x_0)\sqrt{2 g x_0 + x_0^2} + 2(2 g x_0 + x_0^2)},$$

und hier lassen sich Zähler und Nenner durch die Wurzel dividieren, so daß bleibt

$$b_1 = \frac{g + 2x_0 - 2\sqrt{2 g x_0 + x_0^2}}{g + 2x_0 + 2\sqrt{2 g x_0 + x_0^2}}, \qquad b_2 = 1.$$

Der Nenner von b_1 ist offenbar positiv. Das Vorzeichen des Zählers ist gleich dem Vorzeichen des Ausdruckes, den man erhält, wenn man seine beiden Bestandteile quadriert und dann voneinander subtrahiert. Nun ist

$$(g + 2x_0)^2 - 4(2 g x_0 + x_0^2) = \frac{9 p^4}{4 q^2} - \left(3 x_0^2 + \frac{3 p^2}{q} x_0\right),$$

und es ist

$$3 x_0^2 < \frac{3 p^2}{4 q^2}, \qquad \frac{3 p^2}{q} x_0 < \frac{3 p^4}{2 q^2},$$

also

$$\frac{9 p^4}{4 q^2} > 3 x_0^2 + \frac{3 p^2}{q} x_0;$$

d. h. $b_1 > 0$ und, wie man sofort sieht, < 1.

Endlich ist

$$B^2 = \left(x_0 + \sqrt{2gx_0 + x_0^2} + \frac{g}{2} + \frac{\sqrt{g^2 - 4gx_0}}{2}\right)$$
$$\cdot\left(x_0 + \sqrt{2gx_0 + x_0^2} + \frac{g}{2} - \frac{\sqrt{g^2 - 4gx_0}}{2}\right) \cdot \sqrt{2gx_0 + x_0^2}.$$

Wir lassen diesen Ausdruck vorläufig so stehen; B^2 ist offenbar positiv. Somit reduziert sich das Integral der Gleichung 10) auf die Gestalt

$$\frac{1}{B}\int \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - b_1)(1 - y^2)}}.$$

Was die Grenze für $x = x_0$ angeht, so ist nach Gleichung 11)

$$y = \frac{r - x}{x - s} = \frac{x_0 - x - \sqrt{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}}{x - x_0 - \sqrt{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}},$$

d. h. für $x = x_0$ wird $y = 1$. Somit wird, wenn man abkürzend setzt

$$\frac{B\sqrt{q}}{\sqrt{6(2gx_0 + x_0^2)}} = H, \tag{12}$$

$$Ht = \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - b_1)(1 - y^2)}}. \tag{13}$$

Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß $\Delta \operatorname{am}(-Ht) = \Delta \operatorname{am} Ht$ ist, ergibt diese Gleichung die Umkehrung

$$y = \Delta \operatorname{am} Ht_{\operatorname{mod} \sqrt{1 - b_1}} \tag{14}$$

und damit gemäß Gleichung 11)

$$x = \frac{r + s\,\Delta \operatorname{am} Ht}{1 + \Delta \operatorname{am} Ht} = r + (s - r)\frac{\Delta \operatorname{am} Ht}{1 + \Delta \operatorname{am} Ht} \operatorname{mod} \sqrt{1 - b_1}. \tag{15}$$

Die in dieser Gleichung auftretenden Konstanten sind ausgerechnet

$$r = x_0 - \sqrt{\frac{3x_0}{q}(qx_0 + p^2)},$$

$$s - r = 2\sqrt{\frac{3x_0}{q}(qx_0 + p^2)},$$

$$H^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{qx_0}{3}(qx_0 + p^2)} + \frac{1}{4}(2qx_0 + p^2),$$

und für den Modulus $\varkappa$ der Amplitude ergibt sich

$$\varkappa^2 = \frac{4\sqrt{\frac{x_0}{3q}(q x_0 + p^2)}}{\frac{1}{2q}(2qx_0 + p^2) - 2\sqrt{\frac{x_0}{3q}(q x_0 + p^2)}}.$$

Für den Fall, daß gleichzeitig die Anfangselongation x_0 und die Abweichung vom HOOKEschen Gesetz klein sind, ist $q x_0$ ein Kleines zweiter Ordnung gegen p^2, kann also vernachlässigt werden; die Formeln sind so zusammengestellt, daß die daraus hervorgehende Vereinfachung in die Augen springt.

Versteht man unter K, wie üblich, das vollständige elliptische Integral mit dem Modulus $\varkappa$, und unter K' dasselbe für den Modulus $\varkappa' = \sqrt{1 - \varkappa^2}$ und setzt man

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = h,$$

so gilt bekanntlich für alle reellen Werte von Ht die Reihenentwickelung

$$\Delta \operatorname{am} Ht = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{h}{1+h^2}\cos\frac{\pi Ht}{K} + \frac{h^2}{1+h^4}\cos\frac{2\pi Ht}{K} + \cdot\cdot\right\}$$

Demgemäß hängt nach Gleichung 15) die Periodizität der gesuchten Erscheinung an den Cosinus, die in dieser Gleichung auftreten, und Gleichung 15) enthält bereits die beiden Aussagen:

a) Die Schwingung von μ ist asymmetrisch,

b) sie liefert einen Grundton mit sämtlichen, geraden und ungeraden Obertönen, und die Kreisfrequenz des Grundtones ist $\frac{\pi H}{K}$.

Wäre $q = 0$, so wäre offenbar p die Kreisfrequenz der behandelten Schwingung. Zu der oben schon berührten Voraussetzung $q x_0 \leqslant p^2$ fügen wir noch die Annahme hinzu, es handele sich um hörbare Töne, also p sei eine große Zahl, und wollen damit annähernd feststellen, wie sich die Kreisfrequenz unseres Grundtones zu p verhält.

Ist $q x_0 \leqslant p^2$, so wird aus der obigen Formel für H

$$H = \sqrt{\frac{p}{2}\sqrt{\frac{q x_0}{3} + \frac{p^2}{4}}}.$$

Nun ist aber auch $\frac{p}{2}$ noch klein gegen $\frac{p^2}{4}$, und da $\sqrt{q x_0}$ wieder $\leqslant p$ ist, kann für die erste Annäherung auch das erste Glied unter dieser Wurzel beiseite gelassen werden, also bleibt

$$H \backsim \frac{p}{2}.$$

Ferner wird

$$\varkappa^2 = \frac{4p\sqrt{\frac{x_0}{3q}}}{\frac{p^2}{2q} - 2p\sqrt{\frac{x_0}{3q}}}.$$

Auch hier ist im Nenner das zweite Glied wieder klein gegen das erste, so daß man in erster Annäherung erhält

$$\varkappa^2 = \frac{8}{p}\sqrt{\frac{q x_0}{3}}.$$

Dabei ist offenbar $\varkappa^2 \leqslant 1$, und man kann sich demgemäß in der bekannten Reihenentwickelung für K auf die beiden ersten Glieder beschränken, erhält also

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\varkappa^2\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2}{p}\sqrt{\frac{q x_0}{3}}\right),$$

damit ergibt sich

$$\frac{\pi H}{K} = \frac{p}{1 + \sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{q x_0}{p^2}}}. \qquad 16)$$

Der Grundton von μ ist also unter den vorausgesetzten Bedingungen ein wenig tiefer, als er ohne das quadratische Glied sein würde.

Versucht man weiterzugehen und die Intensitätsverhältnisse der verschiedenen Obertöne zu ermitteln, so stößt man auf die Schwierigkeit, daß man für x nicht eine einfache Reihe, sondern eine unendliche Doppelreihe erhält. Dieselbe Schwierigkeit steckt, wenn man der Sache auf den Grund geht, auch in der bekannten von HELMHOLTZ und von CL. SCHAEFER angegebenen Reihenbehandlung der Gleichung für Kombinationstöne. Sie soll hier nur angedeutet und nicht näher berührt werden.

Solange man die Gleichung 1) als bestimmend annimmt, ist offenbar die Asymmetrie der Schwingung mit der Entstehung der

Obertöne unausweichlich verknüpft. HELMHOLTZ hat in den „Tonempfindungen", wo er von den Kombinationstönen spricht, nur das quadratische Glied als Bestandteil der Gleichung 1) in Betracht gezogen und von diesem Standpunkt aus mit Recht die Asymmetrie der Schwingung als wesentliche Bedingung für das Zustandekommen von Obertönen und Kombinationstönen bezeichnet. Es scheint gelegentlich, als ob daraus bei einzelnen Autoren die Ansicht entstanden wäre, das eigentlich Wesentliche für das Zustandekommen derartiger Töne sei die Asymmetrie. Das ist nun offenbar nicht der Fall; führt man statt qx^2 ein kubisches Glied qx^3 oder beliebige Glieder mit ungeraden Potenzen von x ein, so erhält man gleichfalls Obertöne, aber nur ungeradzahlige[1]). An die Asymmetrie des schwingenden Objektes ist also nicht die Entstehung der Obertöne schlechthin, sondern nur diejenige der geradzahligen Obertöne gebunden. In Fällen, wo die Kräfte nicht zu übersehen sind, kann aber die Asymmetrie des Ausschlages als Anzeichen für die Existenz von quadratischen usw. Kräftewirkungen dienen.

---

[1]) Vgl. F. BRAUN, Pogg. Ann. **151**, 51 und 250, 1874.

Bemerkung zu E. Gehrckes Notiz „Über den Äther“ [1]).

Von A. Einstein.

(Eingegangen am 29. November 1918.)

In der genannten Notiz wird die Behauptung aufgestellt, daß die Aberration sich aus der Theorie eines mit der Materie bewegten Lichtäthers erklären lasse. Diese Behauptung stützt sich auf eine von STOKES gegebene Theorie, über welche in der dritten Auflage von DRUDEs Optik kurz referiert ist. Bei der Wichtigkeit des Gegenstandes und bei der Autorität von STOKEs halte ich es für nötig, darauf hinzuweisen, daß jene Theorie unhaltbar ist, weil sie auf einander widersprechenden Voraussetzungen beruht. Wenn nämlich der Äther von den Himmelskörpern mitgenommen wird, so kann der Vektor seiner Geschwindigkeit nicht überall wirbelfrei (und stetig) sein, wie es die STOKESsche Ableitung des Aberrationsgesetzes fordert; es folgt dies aus wohlbekannten Sätzen der Potentialtheorie.

In Wahrheit ist die Hypothese eines mit den Himmelskörpern mitbewegten Äthers mit dem Aberrationsgesetze unvereinbar.

---

[1]) Diese Verhandl. **20**, 165—169, 1918.

Bemerkung zu dem Aufsatze des Herrn Gehrcke „über den Äther".

Von H. Seeliger.

(Eingegangen am 2. Dezember 1918.)

Zu dem Aufsatze des Herrn GEHRCKE [1]) erlaube ich mir folgendes zu bemerken.

Ich habe mich nicht „bemüht, einen Fehler in GERBERS Ableitung aufzuzeigen", vielmehr habe ich bewiesen, daß ein grober mathematischer Fehler vorliegt. Die übrigen Bemerkungen Herrn GEHRCKES zeigen, ganz abgesehen von vielem anderen, nur, daß ihm die ganze Frage in sachlicher wie historischer Beziehung völlig fremd ist. Seit 50 Jahren ist bekannt, daß das WEBERsche Gesetz eine Perihelbewegung der Merkurbahn ergibt. Bald nach der Entdeckung der Bewegungsanomalie durch LEVERRIER hat der Mathematiker SCHEIBNER 1867 und der Astronom TISSERAND 1872 den Betrag ermittelt. Beide haben die Konstante des WEBERschen Gesetzes f gleich $c\sqrt{2}$ angenommen, wo c die Lichtgeschwindigkeit ist, und da die Perihelbewegung proportional mit $1/f^2$ geschieht, bedarf es nur einer Multiplikation, um den Einfluß des anzuwendenden Wertes von f festzustellen. Alles, was hiermit zusammenhängt, findet sich in Band IV (1896) von TISSERANDS „Mécanique céleste", einem Werke, das in den Händen wohl jedes Astronomen ist. Dort werden auch die Gesetze von RIEMANN und GAUSS behandelt.

Ich füge noch hinzu, daß die Gleichsetzung von Potential und Arbeit der wirkenden Kräfte dem ausdrücklichen Wortlaute in dem GERBERschen Aufsatz entspricht und in diesem Zusammenhange vernünftigerweise entsprechen mußte.

Im übrigen sind alle diese Dinge dem Astronomen so geläufig, daß er es nicht verstehen kann, wie sich Herr GEHRCKE zu seiner Bemerkung verleiten lassen konnte. Dem „Ruhm" seines Schützlings hätte er sicherlich erfolgreicher gedient, wenn er über die ganze fatale Angelegenheit Stillschweigen beobachtet hätte.

München.

[1]) Diese Verh. **20**, 165, 1918.

Mitgliederliste
der
Deutschen Physikalischen Gesellschaft.

Im Jahre 1918 verlor die Gesellschaft durch den Tod:

Prof. Dr. R. Assmann, Prof. Dr. H. du Bois, Prof. Dr. von dem Borne, Prof. Dr. F. Braun, Dr. M. Iklé, Prof. Dr. E. Lampe, Dr. A. Lessing, Prof. Dr. O. Reichel, Prof. Dr. H. Th. Simon, Dr. Ernst Weber, Prof. Dr. B. Weinstein.

Am Ende des Jahres 1918 waren Mitglieder der Gesellschaft:

A. Ehrenmitglied.

1. Herr Prof. Dr. E. Warburg, Charlottenburg 2, Marchstraße 25 b.

B. Berliner Mitglieder.

2. Herr Prof. Dr. M. Abraham[1]), SW. 61, Tempelhofer Ufer 9.
3. „ Dr. Egon Alberti, Halensee, Joachim-Friedrichstraße 47.
4. „ E. Altenkirch, Fredersdorf (Ostbahn), Waldstraße 1.
5. „ Dr. F. S. Archenhold, Treptow, Sternwarte.
6. „ Dr. Max Arndt, Halensee, Friedrichsufer 16.
7. „ Dr. Hans Arons, Friedrichshagen.
8. „ Prof. Dr. L. Arons, NW. 23, Brückenallee 3.
9. „ Dr. Albert Bachem, Tempelhof, Mussehlstraße 23.
10. „ Prof. Dr. Otto v. Baeyer, NW. 7, Reichstagsufer 7/8.
11. „ Ingenieur Adrian Baumann, Siemensstadt, Kapellensteig 1.
12. „ W. Bechstein, S. 42, Prinzessinnenstraße 16.
13. „ Dr. Richard Becker, Grunewald, Hohenzollerndamm 65/66.
14. „ Obering. Dr. H. Beckmann, Oberschönew., Wilhelminenhofstr. 66/69.
15. „ Dr. Hermann Behnken, Charlottenburg 2, Goethestraße 17.
16. „ Reg.-Rat Dr. W. Bein, Wilmersdorf, Hildegardstraße 21.
17. „ Dr. Kurt Bennewitz, Charlottenburg 9, Fredericiastraße 5.
18. „ Dr. O. Berg, Schlachtensee, Heinrichstraße 7.
19. „ Dr. Fr. Bergter, Charlottenburg 1, Tegeler Weg 14.
20. „ Dr. A. Berliner, W. 35, Lützowstraße 63.
21. „ Prof. Dr. G. Berndt, Friedenau, Laubacherstr. 7.
22. „ Dr. Otto Bernhard, W. 50, Ansbacherstraße 5.
23. „ Korvetten-Kapitän Betz, SW. 61, Tempelhofer Ufer 9.
24. „ Ing. W. Biegon v. Czudnochowski, N. 113, Kuglerstraße 7.
25. „ Prof. Dr. E. Blasius, Charlottenburg 4, Schillerstraße 22.
26. „ Prof. A. Blümel, SO. 16, Melchiorstraße 22.
27. „ H. Boas, O. 27, Krautstraße 52.
28. „ Immanuel Böhm, N. 65, Lüttícherstraße 37.

[1]) Berlin ist in dem Verzeichnis weggelassen.

29. Herr Prof. Dr. H. Böttger, Grunewald, Trabenerstraße 21.
30. „ Dr. E. Bollé, Charlottenburg 2, Fraunhoferstraße 17.
31. „ Dr. Bruno Borchardt, Charlottenburg 5, Saldernstraße 2.
32. „ Prof. Dr. M. Born, Grunewald, Teplitzerstraße 5.
33. „ Debendra M. Bose.
34. „ Dr. W. Bothe.
35. „ Dr. F. Bremer, Nikolassee (Wannseebahn), Villa Bremer.
36. „ Prof. Dr. E. Brodhun, Grunewald, Franzensbaderstraße 3.
37. „ Prof. Dr. E. Budde, W. 15, Ludwigskirchstraße 8.
38. „ Prof. Dr. A. Byk, Charlottenburg 4, Mommsenstraße 13.
39. „ Prof. Dr. Const. Carathéodory, W. 8, Markgrafenstr. 33, Pens. Ludwig.
40. „ Dr. P. Caspar, Oberschöneweide, Bismarckstraße 27.
41. „ H. Cassel, W. 15, Lietzenburgerstraße 17.
42. „ Dr. phil. Friedrich Conrad, Charlottenburg 5, Kuno-Fischerstraße 18.
43. „ Prof. Dr. C. Cranz, Charlottenburg 2, Fasanenstraße 87.
44. „ Prof. Dr. Max Cremer, NW. 23, Klopstockstraße 21.
45. „ Dr. Ernst Dibbern, NW. 52, Paulstraße 12.
46. „ Dr. J. Disch, Charlottenburg 2, Werner-Siemensstraße 8/12.
47. „ Prof. Dr. F. Dolezalek, Charlottenburg 5, Kuno-Fischerstraße 7.
48. „ Prof. Dr. B. Donath, W. 30, Viktoria-Luiseplatz 2.
49. „ Dr. Otto Droysen, Friedenau, Albestraße 12.
50. „ cand. phil. Walter Dziobek, Plötzensee, Militärversuchsamt.
51. „ Dr. A. Ebeling, Charlottenburg 5, Neue Kantstraße 3.
52. „ Dr. John Eggert, Halensee, Humboldtstraße 4.
53. „ Prof. Dr. A. Einstein, W. 30, Haberlandstraße 5.
54. „ Reg.-Baumeister Dr. Kurt Eisenmann, N. 24, Friedrichstraße 130.
55. „ Dr. Victor Engelhardt, N. 4, Invalidenstraße 42.
56. „ Dr. Josef Engl, Grunewald, Orberstraße 17.
57. „ Dr. Emil Everling, Cöpenick, Lindenstraße 10.
58. „ Dr. Rudolf Ewald, Charlottenburg 2, Bleibtreustraße 7.
59. „ Prof. Dr. Heinrich Fassbender, Charlottenburg 2, Techn. Hochschule.
60. „ Dr. W. Felgentraeger, Charlottenburg 2, Werner-Siemensstr. 27/28.
61. „ Dr. Heinrich Finger, Charlottenburg 1, Königin-Luisestraße 13.
62. „ Dr. C. Fischer, NW. 21, Bochumerstraße 18.
63. „ Dr. Kuno Fischer, Charlottenburg 1, Nonnendamm, Kabelwerk.
64. „ Prof. Dr. James Franck, Charlottenburg 9, Akazienallee 32.
65. „ Dr. A. Franke, Grunewald, Brahmsstraße 15.
66. „ Dr. Robert Fürstenau, W. 35, Kurfürstenstraße 146.
67. „ Wiss. Hilfslehrer Friedrich Gebhardt, N. 31, Wattstraße 14.
68. „ Dr. Georg Gehlhoff, Friedenau, Ortrudstraße 33.
69. „ Dr. Paul Gehne, SW. 61, Gitschinerstraße 97/103 (Patentamt).
70. „ Prof. Dr. E. Gehrcke, Lichterfelde 3, Weddigenweg 8.
71. „ Dr. A. Gehrts, Schöneberg, Königsweg 5.
72. „ Dr. Friedr. Gehrts, N. 4, Invalidenstraße 42.
73. „ Prof. Dr. H. Geiger, Charlottenburg 5, Kuno-Fischerstraße 20.
74. „ Karl Gentil, Schöneberg, Wielandstraße 42.
75. „ Dr. Fritz Gerb, W. 15, Uhlandstraße 161.
76. „ Prof. Dr. H. Gerdien, Grunewald, Franzensbaderstraße 5.
77. „ Dr. Fritz Gerth, Schöneberg, Martin-Lutherstraße 71.
78. „ cand. phil. F. A. Giacomini, Charlottenburg 4, Kaiser-Friedrichstr. 39.

79. Herr Dr. Erich Giebe, Charlottenburg 5, Schloßstraße 7/8.
80. „ Dr. L. C. Glaser, SW. 68, Lindenstraße 99.
81. „ cand. phil. Erich Goens, NW. 23, Klopstockstraße 33.
82. „ Prof. Dr. F. Göpel, Charlottenburg 2, Knesebeckstraße 22.
83. Frl. Dr. Hildegard Goerig, Schöneberg, Akazienstraße 5.
84. Herr Prof. Dr. E. Goldstein, W. 50, Bambergerstraße 6.
85. „ Walter Gordon, Schöneberg, Vorbergstraße 14.
86. „ Dr. A. Gradenwitz, Friedenau, Goßlerstraße 20.
87. „ Prof. Dr. E. Grüneisen, Charlottenburg 1, Berlinerstraße 49.
88. „ Prof. Dr. L. Grunmach, Wilmersdorf, Tübingerstraße 4.
89. „ Ingenieur Dr. G. Gruschke, Wilmersdorf, Hildegardstraße 24.
90. „ Dr. Paul Günther, Charlottenburg 2, Knesebeckstraße 17.
91. „ Prof. Dr. E. Gumlich, Charlottenburg 2, Knesebeckstraße 85.
92. „ Prof. Dr. F. Haber, Lichterfelde 3, Faradayweg 8.
93. „ W. Haensch, S. 42, Prinzessinnenstraße 16.
94. „ Prof. Dr. E. Haentzschel, Halensee, Johann-Georgstraße 20.
95. „ Prof. H. Hahn, Halensee, Nestorstraße 14.
96. „ Prof. Dr. O. Hahn, Lichterfelde 3, Ladenbergstraße 5.
97. „ Dr. Werner Haken, NW. 23, Lessingstraße 37.
98. „ stud. phil. Wilhelm Hartwig, NO. 18, Thornerstraße 62.
99. „ Dr. Wilhelm Hausser, Friedenau, Taunusstraße 10.
100. „ Theodor Heele, O. 34, Zorndorferstraße 50.
101. „ Dr. L. Heis, Grünau, Cöpenickerstraße 19.
102. „ Prof. Dr. G. Hellmann, W. 35, Schönebergerufer 48.
103. „ Oberlehrer Paul Henckel, Friedenau, Stierstraße 20.
104. „ Prof. Dr. Fr. Henning, Lichterfelde 3, Tulpenstraße 5.
105. „ Dr. Erich Henschke, Halensee, Markgraf-Albrechtstraße 5.
106. „ Dr. Karl Herrmann, Charlottenburg 4, Goethepark 20.
107. „ Dr. G. Hertz, NW. 7, Reichstagsufer 7/8.
108. „ Dr. Gerhard Hettner, Charlottenburg 5, Witzlebenstraße 31.
109. „ Dr. W. Heuse, Lichterfelde 3, Im schwarzen Grund 14.
110. „ Prof. Dr. R. Heyne, W. 57, Zietenstraße 3.
111. „ Dr. Josef Hirsch, Schmargendorf, Breitestraße 14 a.
112. „ Dr. Erich Höhne, Wilmersdorf, Hildegardstraße 24.
113. „ Prof. Dr. vom Hofe, Lichterfelde, Baselerstraße 4.
114. „ Dr. Christ. von Hofe, Zehlendorf (Wannseebahn), Parkstraße 3.
115. „ Prof. Dr. Fr. Hoffmann, Charlottenburg 5, Königsweg 29.
116. „ Prof. Dr. L. Holborn, Charlottenburg 5, Friedrich-Karlplatz 17.
117. „ Prof. Dr. D. Holde, Wilmersdorf, Rüdesheimerplatz 7.
118. „ Oberlehrer Dr. K. Hollefreund, SW. 61, Großbeerenstraße 83.
119. „ cand. phil. W. Hüttemann, S. 59, Müllenhoffstraße 6.
120. „ Dr. Erich F. Huth, W. 30, Landshuterstraße 9.
121. Dr. Erich F. Huth, Ges. f. Funkentelegr. m. b. H., SW. 48, Wilhelmstr. 130/2.
122. Herr Dr. Alfred Jachan, N. 58, Prenzlauerallee 89.
123. „ Prof. Dr. W. Jaeger, Friedenau, Lauterstraße 38.
124. „ Prof. Dr. E. Jahnke, W. 15, Darmstädterstraße 9.
125. „ Prof. Dr. Max Jakob, Charlottenburg 9, Kastanienallee 27.
126. „ Dr. Ludwig Janicki, Charlottenburg 1, Tegelerweg 4.
127. „ Hans S. Joachim, SW. 11, Dessauerstraße 8.
128. „ Dr. Wilhelm John, NW. 87, Waldstraße 55.

129. Herr Dr. Hans Jordan, Karlshorst, Dorotheastraße 26.
130. „ Prof. Dr. G. Just, W. 62, Lützowufer 38.
131. „ Prof. Dr. S. Kalischer, W. 15, Konstanzerstraße 1.
132. „ Prof. Dr. Franz Kiebitz, Steglitz, Sedanstraße 2.
133. „ Prof. O. Kiewel, Nikolassee, Prinz-Friedrich-Leopoldstraße 26.
134. „ Dr. Albert Klages, Charlottenburg 2, Goethestraße 66.
135. „ cand. phil. H. Klewe, Pankow, Mendelstraße 47.
136. „ Dr. Paul Knipping, Charlottenburg 4, Gervinusstraße 25.
137. „ Dr. H. Kochan, NW. 87, Tile-Wardenbergstraße 26.
138. „ cand. phys. Fritz Köhler, SO. 16, Michaelkirchstraße 7.
139. „ Dr. A. Koepsel, Friedenau, Kaiserallee 99/100.
140. „ Prof. Oberlehrer M. Koppe, N. 65, Seestraße 43.
141. „ Prof. Dr. A. Korn, Charlottenburg 4, Schlüterstraße 25.
142. „ Dr. H. Kreusler, Friedenau, Wilhelmshöherstraße 4.
143. „ Prof. Dr. O. Krigar-Menzel, Steglitz, Peter-Lennéstraße 14.
144. Frl. Thea Krüger, Wilmersdorf, Tübingerstraße 4a.
145. Herr Prof. Dr. H. A. Krüss, W. 8, Wilhelmstraße 68.
146. „ Prof. Dr. F. Kurlbaum, Steglitz, Peter-Lennéstraße 32.
147. „ Walter Kutzner, NW. 52, Alt-Moabit 14.
148. „ Dr. Ernst Lamla, Charlottenburg 2, Schlüterstraße 12.
149. „ Dr. G. Langbein, Charlottenburg 5, Schloßstraße 11.
150. „ Dr. E. Lehmann, Charlottenburg 2, Carmerstraße 6.
151. „ Dr. R. Lehnhardt, Friedenau, Laubacherstraße 20.
152. „ Ing. Egbert v. Lepel, Wilmersdorf, Weimarischestraße 4.
153. „ Ingenieur Otto Leppin, SO. 16, Engelufer 17.
154. „ Dr. E. Less, NW. 23, Bachstraße 3.
155. „ Prof. Dr. L. Levy, W. 57, Potsdamerstraße 73a.
156. „ Dr. Erik Liebreich, NW. 40, Kronprinzenufer 30.
157. „ Prof. Dr. Otto Liesche, Lichterfelde 3, Steglitzerstraße 19.
158. „ Dr. F. A. Lindemann, NW. 7, Bunsenstraße 1.
159. „ Oberlehrer Werner Loest, Neukölln, Bergstraße 112.
160. C. Lorenz, Aktiengesellschaft, SO. 26, Elisabethufer 5/6.
161. Herr Dr. Karl Lübben, W. 9, Königgrätzerstraße 20.
162. „ F. Lüschen, Südende, Berlinerstraße 14a.
163. „ Reg.-Rat Dr. K. Luyken, Schöneberg, Am Park 18.
164. „ cand. phil. Otto Maas.
165. „ Dr. Alfred Magnus, Charlottenburg 4, Schlüterstraße 61.
166. „ Dr. A. Mahlke, Charlottenburg 2, Leibnizstraße 92.
167. „ Prof. Dr. F. F. Martens, NW. 87, Tile-Wardenbergstr. 19.
168. „ Prof. Dr. Werner Mecklenburg, Lichterfelde 3, U. d. Eichen 84b.
169. „ Dr. W. Meissner, Charlottenburg 9, Nußbaumallee 15.
170. Frl. Dr. Lise Meitner, Lichterfelde 3, Zietenstraße 15.
171. Herr Oberlehrer Dr. W. Mendelssohn, Straußberg, Wilhelmstraße 14.
172. „ Dr. Erich Merkel, Charlottenburg 2, Werner-Siemensstraße 8/12.
173. „ Dr. Karl Mey, NW. 87, Solingerstraße 3.
174. „ Dr. Alfred Meyer, NO. 55, Raabestraße 7.
175. „ Geh. Reg.-Rat Dr. Ernst Meyer, Friedenau, Kaiserallee 133.
176. „ Prof. Dr. R. J. Meyer, W. 15, Meinekestraße 8.
177. „ Theodor Meyer, W. 10, Von der Heydtstraße 17.
178. „ Dr. Ulfilas Meyer, Lichterfelde 1, Hobrechtstraße 18.

179. Herr Prof. Dr. C. MICHAELIS, Potsdam, Schützenplatz 1a.
180. „ Prof. Dr. MIETHE, Halensee, Halberstädterstraße 7.
181. Frl. Dr. HILDEGARD MIETHING, Charlottenburg 2, Berlinerstraße 37/38.
182. Herr Dr. GUIDO MOELLER, NW. 51, Calvinstraße 8.
183. „ Dr. H. G. MÖLLER, Friedenau, Fregestraße 24.
184. „ Dr. KURT MÖLLER, Friedenau, Illstraße 1.
185. „ Dr. CARL MÜLLER, Charlottenburg 9, Soorstraße 39.
186. „ Dipl.-Ing. FRIEDR. MÜLLER, W. 15, Meinekestraße 22.
187. „ Dr. R. NAHRWOLD, C. 19, Niederwallstraße 12.
188. „ Dr. ROBERT NAUMANN, W. 15, Fasanenstraße 61.
189. „ Prof. Dr. FR. NEESEN, W. 50, Ansbacherstraße 31.
190. „ Prof. Dr. W. NERNST, W. 35, Am Karlsbad 26a.
191. „ Chefingenieur JOH. NIENHOLD, NW. 21, Emdenerstraße 26.
192. „ Dr. E. OETTINGER, Charlottenburg 2, Carmerstraße 17.
193. „ Prof. Dr. HANS OPITZ, SW. 48, Wilhelmstraße 143.
194. „ Prof. Dr. E. ORLICH, Zehlendorf (Wannseebahn), Dallwitzstraße 24.
195. „ Oberlehrer MAX PARADIES, NW. 21, Dortmunderstraße 4.
196. „ Dr. ARTUR PARTZSCH, Karlshorst, Heiligenbergerstraße 3.
197. „ Dr. KURT PETROW.
198. „ Prof. Dr. J. PETZOLDT, Spandau, Wröhmännerstraße 6.
199. „ Prof. Dr. R. PICTET, Wilmersdorf, Hildegardstraße 12a.
200. „ Dr. VIKTOR PIECK, Tempelhof, Kaiserin-Augustastraße 18.
201. „ Dr. J. PINSKER, Charlottenburg 4.
202. „ Prof. Dr. M. PIRANI, Wilmersdorf, Hohenzollerndamm 198.
203. „ Prof. Dr. M. PLANCK, Grunewald, Wangenheimstraße 21.
204. „ Dr. E. PODSZUS, Neukölln, Schwarzastraße 1.
205. „ Prof. Dr. F. POSKE, Lichterfelde 3, Friedbergstraße 5.
206. „ Dr. P. PRINGSHEIM, W. 35, Lützowstraße 63.
207. Frl. GABR. RABEL, NW 6, Charitéstraße 9.
208. Herr Prof. Dr. A. RAPS, Charlottenburg 9, Ulmenallee 14.
209. „ Prof. Dr. ERICH REGENER, Charlottenburg 2, Hertzstraße 6.
210. „ Dr. FRITZ REICH, NW. 7, Dorotheenstraße 53.
211. „ Dr. FRITZ REICHE, W. 10, Friedrich-Wilhelmstraße 20.
212. „ Prof. Dr.-Ing. W. REICHEL, Lankwitz, Beethovenstraße 14.
213. „ Prof. Dr. O. REICHENHEIM, Wannsee, Friedrich-Karlstraße 19.
214. „ Ingenieur EUGEN REISS, SO. 33, Moosdorfstraße 13.
215. „ Prof. Dr.-Ing. H. REISSNER, Charlottenburg 9, Ortelsburgallee 2.
216. „ Ingenieur G. REUTHE.
217. „ Dr. F. RITTER, Charlottenburg 2, Fraunhoferstraße 15.
218. „ Dr. M. ROBITZSCH, Lindenberg, Kr. Beeskow, Aeronaut. Observat.
219. „ Dr.-Ing. W. ROGOWSKI, Charlottenburg 2, Werner-Siemensstr. 8/12.
220. „ Dr. H. ROSENTHAL, W. 30, Stübbenstraße 3.
221. „ Prof. Dr. RUDOLF ROTHE, Wilmersdorf, Trautenaustraße 16.
222. „ Dr. K. ROTTGARDT, Lichterfelde 3, Fontanestraße 14.
223. „ Oberingenieur A. ROTTH, W. 35, Magdeburgerstraße 22.
224. „ Prof. Dr. H. RUBENS, NW. 7, Neue Wilhelmstraße 16.
226. „ Dr. ing. REINHOLD RÜDENBERG, Charlottenburg 9, Kastanienallee 27.
225. „ Dr. H. RUKOP, SW. 11, Möckernstraße 119.
227. „ Dr. HANS SALINGER, W. 62, Kleiststraße 31.
228. „ Prof. Dr. KARL SCHEEL, Lichterfelde 3, Werderstraße 28.

*

229. Herr Prof. Dr. W. Scheffer, Wilmersdorf, Rüdesheimerplatz 11.
230. „ Prof. Dr. E. Schenck, SO. 26, Mariannenstraße 47.
231. „ Dr. H. Schering, Charlottenburg 1, Osnabrückerstraße 17.
232. „ Dr. Hans Schimank, Schöneberg, Vorbergstraße 8.
233. „ cand. phil. Schleede, Weißensee, Streustraße 125.
234. „ Prof. Dr. A. Schmidt, Potsdam, Telegraphenberg.
235. „ Geh. Reg.-Rat Dr. Erich Schmidt, W. 15, Kurfürstendamm 58.
236. „ Dr. Rudolf Schmidt, Friedenau, Wiesbadenerstraße 84.
237. „ Oberlehrer Erich Schneeweiss, Potsdam, Waldemarstraße 22.
238. „ Dr. Hans Schneider, Steglitz, Bismarckstraße 8.
239. Frl. Ilse Schneider, W. 10, Dörnbergstraße 6.
240. Herr Prof. Dr. O. Schönrock, NW. 87, Jagowstraße 10.
241. „ Prof. Dr. P. Scholz, Steglitz, Fichtestraße 34.
242. „ Dr. R. Scholz, Charlottenburg 1, Scharrenstraße 39.
243. „ Dr. Schotte, W. 57, Elßholzstraße 3.
244. „ Dr. Walter Schottky, Charlottenburg 1, Schulstraße 1.
245. „ Dr. Julius Schünemann, Spandau, Pichelsdorferstraße 12.
246. „ Dr. Hans Schulz, Lichterfelde 1, Großbeerenstraße 13.
247. „ Dr. Alfred Schulze, Charlottenburg 4, Pestalozzistr. 99a.
248. „ Oberlehrer Wilhelm Schulze, O. 112, Simon-Dachstr. 34.
249. „ Prof. Dr. G. Schwalbe, Zehlendorf (Wannseebahn), Riemeisterstr. 7.
250. „ Dr. Gustav Schweickert, Charlottenburg 1, Am Lützow 13.
251. „ Prof. Dr. W. Schweydar, Potsdam, Leipzigerstraße 16.
252. „ Dr. Bruno Seegert, Charlottenburg 5, Königsweg 55.
253. „ Oberlehrer Dr. A. Seemiller, N. 65, Ostenderstraße 3.
254. „ Dr. Georg Seibt, Schöneberg, Hauptstraße 9.
255. „ Dr. Hermann v. Siemens, Siemensstadt.
256. „ Geh. Reg.-Rat Dr. Wilh. v. Siemens, Siemensstadt, Verwalt.-Geb.
257. „ Dr. F. Skaupy, O. 17, Rotherstraße 1.
258. „ Dr. Smekal, Charlottenburg 2, Schillerstraße 115.
259. „ Dr. Theodor Sonnenschein, NW. 21, Alt-Moabit 104.
260. „ Oberlehrer Dr. Herm. Spohn, NW. 87, Elberfelderstraße 35.
261. „ Verlagsbuchhändler Ferd. Springer, W. 9, Linkstraße 23/24.
262. „ Dr. W. Starck, Friedenau, Südwest-Corso 6.
263. „ Hugo Stautmeister, Charlottenburg 2, Schlüterstraße 5.
264. „ Dr. Wilh. Steinhaus, Charlottenburg 2, Werner-Siemensstr. 7.
265. „ Prof. Dr. H. v. Steinwehr, Lichterfelde 3, Manteuffelstr. 2.
266. „ Dr. Otto Stern, Charlottenburg 4, Schlüterstraße 37.
267. „ Oberlehrer Fr. Stofferan, Steglitz, Albrechtstraße 87.
268. „ Prof. Dr. K. Strecker, W. 62, Burggrafenstraße 15.
269. „ Dr. F. Stumpf, W. 50, Augsburgerstr. 45, z. Z. Kiel, Hospitalstr. 21.
270. „ Prof. Dr. R. Süring, Potsdam, Meteorolog. Observatorium.
271. „ Ingenieur Richard Swinne, NW. 21, Rathenowerstraße 69.
272. „ Dr. G. Szivessy.
273. „ Dr. Bruno Thieme, Wilmersdorf, Rüdesheimerplatz 5.
274. „ Prof. Dr. M. Thiesen, Friedrichshagen, Ahornallee 10.
275. „ Ingenieur Dr. E. Thürmel, Charlottenburg 5, Danckelmannstr. 36.
276. „ Dr. Erich Tiede, SW. 29, Belle-Alliancestraße 40.
277. „ Prof. Dr. I. Traube, Charlottenburg 5, Schloßstraße 29.
278. Frl. stud. phil. W. Trendelenburg, NW. 6, Albrechtstraße 26.

279. Herr Dr. Aug. Uhrig, NO. 18, Virchowstraße 8.
280. „ Dr. W. Volkmann, Steglitz, Humboldtstraße 20.
281. „ Dr. M. Vos, Wilmersdorf, Jenaischestraße 23.
282. „ Dr. Curt Wachtel, O. 18, Gr. Frankfurterstr. 32.
283. „ Prof. Dr. K. W. Wagner, Lankwitz, Luisenstraße 1.
284. „ Geh. Reg.-Rat Dr. C. L. Weber, Lichterfelde 3, Fontanestr. 17.
285. „ Prof. Dr. W. Wedding, Lichterfelde 1, Bahnhofstraße 42.
286. „ Prof. Dr. A. Wehnelt, Friedenau, Fregestraße 26.
287. „ Dr. Franz Weidert, Lichterfelde 3, Potsdamerstraße 32.
288. „ Dr. E. Weiss, Charlottenburg 4, Gervinusstraße 16.
289. „ *Dr. A. Werner, Grunewald, Ilmenauerstraße 12.
290. „ Dr. Wernicke.
291. „ Prof. Dr. Wilhelm Westphal, Zehlendorf, Alsenstraße 121.
292. „ Dr. A. Wetthauer, Charlottenburg 4, Sybelstraße 34.
293. „ Dr. Gustav Wietzel, Charlottenburg 5, Windscheidstraße 5.
294. „ Prof. Dr. J. Wilsing, Potsdam, Astrophys. Observatorium.
295. „ Prof. Dr. J. Winzer, Lichterfelde 1, Gerichtsstraße 11.
296. „ Prof. Dr. R. Wurtzel, Charlottenburg 5, Schloßstraße 58.
297. „ Dr. G. Zickner, Charlottenburg 4, Bismarckstraße 23.
298. „ Ing. Dr. phil. Hans Zöllich, Charlottenburg 9, Spandauerberg 6.
299. „ Oberlehrer Dr. W. Zorn, Karlshorst, Heiligenbergerstraße 1.
300. Preuß. Militärversuchsamt, Berlin-Jungfernheide (Post Plötzensee).
301. Elektrotechnischer Verein, SW. 11, Königgrätzerstraße 106.
302. Gesellschaft für drahtlose Telegraphie, SW. 61, Tempelhoferufer 9.
303. Glühlampenfabrik der Allgem. Elektr. Ges. NW. 87, Sickingenstraße 71.
304. Deutsche Gasglühlicht-Aktiengesellschaft (Auergesellschaft), Direktor H. Remané, O. 17, Rotherstraße 8/12.

C. Auswärtige Mitglieder.

305. Herr Dr. A. Ackermann-Teubner, Leipzig, Poststraße 3.
306. „ Prof. Christ. Allacz, Czernowitz, Emineskugasse 11.
307. „ Dr. M. Altschul, Zürich 8, Florastraße 56.
308. „ Dr. Richard Ambronn, Göttingen, Sternwarte.
309. „ Dr. Ernst von Angerer, München 23, Victor-Scheffelstraße 20.
310. „ Prof. Dr. F. Auerbach, Jena.
311. „ Frhr. Dr. Otto von und zu Aufsess, München 4, Barerstraße 46.
312. „ Prof. Dr. L. Austin, Washington, Bureau of Standards.
313. „ W. Baade, Göttingen, Heinholzweg 30.
314. „ Dr. Ernst Back, Tübingen, Physik. Institut.
315. „ Dr. Richard Bär, Zürich, Schweiz, Bergstraße 54.
316. „ Dr. Hans Baerwald, Darmstadt, Olbrichweg 16.
317. Frl. Dr. Eva von Bahr, Uppsala, Schweden, Universität.
318. Herr Dr. Erich Baisch, Würzburg, Schönleinstraße 4.
319. „ Prof. Dr. E. C. C. Baly, Liverpool, Browlow Street, Chem. Lab.
320. „ Dr. Karl Bangert, Chemnitz, Zschopauerstraße 74.
321. „ Dipl.-Ing. F. Banneitz, Kiel, Niemannsweg 36.
322. „ Sydney G. Barker.
323. „ Prof. Dr. H. Barkhausen, Kiel, Lindenallee 19.
324. „ Prof. Dr. August Becker, Heidelberg, Bergstraße 70.
325. „ Dr. B. Beckman, Uppsala, Schweden, F. Vretgatan 10.

326. Herr Prof. Dr. Hans Benndorf, Graz, Universität.
327. „ cand. phil. Ludwig Berényi, Budapest III, Lukacs u. 4.
328. „ Prof. Dr. K. Bergwitz, Braunschweig, Altewiekring 65.
329. „ Prof. Dr. Arciero Bernini, Pavia, Istituto tecnico.
330. „ Prof. Dr. A. L. Bernoulli, Basel, Spalentorweg 53.
331. „ Dr. R. Bernoulli, Cöln, Brüderstraße 7.
332. „ Dr. G. Berthold, Ronsdorf.
333. „ Prof. Dr. A. Bestelmeyer, Göttingen, Sternstraße 8.
334. „ Dr. Willi Bieber, Frankfurt a./M. 1, Hansa-Allee 8.
335. „ Dr. Victor Biernacki.
336. „ Prof. Dr. Niels Bjerrum, Kopenhagen, Strandvej 35.
337. „ Dr. J. H. van der Bijl, New York 54, Morgningside Drive.
338. „ Dr. Birnbaum, Kiel, Schwanenweg 27.
339. „ Prof. Dr. Max Bodenstein, Hannover, Ellernstraße 6a.
340. „ Prof. Dr. Niels Bohr, Kopenhagen, Stockholmsgade 31.
341. „ Dr. Ottavio Bonazzi, Pisa, Istituto di Fisica.
342. „ Dr. H. Borchardt, Kiel, Physik. Institut, Kirchenstr. 9.
343. „ Dipl.-Ing. Philipp Borchardt, Ludwigshafen, Hanserstraße 3b.
344. „ Dr. C. O. G. Borelius, Lund, Schweden, Universität.
345. Frau Prof. Margrete Bose, Danzig-Langfuhr, Hochschulweg 16.
346. Herr stud. phil. Carl Braband, Heidelberg, Neckarstaden.
347. „ Prof. W. H. Bragg, Leeds, England, Universität.
348. „ Prof. Dr. G. Bredig, Karlsruhe, Wendtstraße 19.
349. „ Dr. Joh. Brentano, Zürich 7, Schweiz, Orellistraße 70.
350. „ Le Duc de Broglie, Paris, Rue Chateaubriand 29.
351. „ Prof. Dr. W. Brüsch, Lübeck, Körnerstraße 4.
352. „ Prof. Dr. H. Bruns, Leipzig, Sternwarte.
353. „ Dr. E. Buchwald, Breslau, Goetzenstr. 8; ab 1. April Borsigstr. 22.
354. „ Oberlehrer Dr. W. Bürger, Elberfeld, Beethovenstraße 1.
355. „ Dr. Wilh. Burmeister, Siggelkow b. Parchim in Mecklenburg.
356. „ Dr. Walter Burstyn, Wien III, Kegelgasse 21.
357. „ Dr. Hans Busch, Göttingen, Schillerstraße 20.
358. „ Prof. Dr. Roman Cegielskij, Wien XVIII, Plenergasse 3.
359. „ Prof. Dr. Paul Cermak, Gießen, Liebigstraße 86.
360. „ Prof. Dr. O. Chwolson, St. Petersburg, Universität.
361. „ Prof. Dr. E. Cohn, Straßburg i. E., Orangeriering 17.
362. Frau cand. phys. Jetty Cohn, Zürich, Schweiz, Goldauerstraße 23.
363. Herr Dr. José Collo, La Plata, Argentinien, Physik. Institut.
364. „ Prof. Dr. R. Courant, Göttingen, Universität.
365. „ Dr. Karl Czukor, Arad, Ungarn, Andrassyplatz 3.
366. „ Dr. A. Dahms, Leipzig-Schleussig, Könneritzstraße 24.
367. „ Dir. Dr. A. L. Day, Washington D. C., 3150 Highland Ave.
368. „ Prof. Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrechtstraße 24.
369. „ Dr. Alfred v. Dechend, Heidelberg, Bergstraße 70.
370. „ Dr. H. v. Dechend, Freiburg i. B., Kybfelsenstraße 3.
371. „ Dr. Louis Dede, Hamburg-Großborstel, Warnckesweg 37.
372. „ Prof. Dr. H. Dember, Dresden-A. 27, Kaitzerstr. 151.
373. „ Dr. Otto Demmler, Kiel, Waitzstraße 28.
374. „ Prof. Dr. A. Denizot, Lemberg, Sykstuska 47.
375. „ Prof. Dr. B. Dessau, Charlottenburg 4, Leibnizstraße 57.

376. Herr Dir. Dr. FRIEDRICH DESSAUER, Frankfurt a. M., Gartenstraße 100.
377. „ OLAF DEVIK, Haldde Observatoriet, Kaafjord, Norwegen.
378. „ Dr. M. DIECKMANN, Gräfelfing b. München.
379. „ Prof. Dr. H. DIESSELHORST, Braunschweig, Technische Hochschule.
380. „ Prof. Dr. C. DIETERICI, Kiel, Niemannsweg 78.
381. „ Prof. Dr. DRECKER, Dorsten, Westfalen, Westwall 33.
382. „ Prof. Dr. KARL DRUCKER, Leipzig, Floßplatz 36.
383. „ Prof. Dr. MARCEL DUFOUR, Nancy, Place de la Carrière 28.
384. „ Dr. FRITZ ECKERT, München 4, Ohmstraße 13.
385. „ Ing. Dr. MAX EDELMANN jr., München 4.
386. „ Prof. Dr. FELIX EHRENHAFT, Wien, Boltzmanngasse 4.
387. „ Dr. GUSTAV EICHHORN, Zürich, Hauptpostfach 6123.
388. Frl. stud. math. EDITH EINSTEIN, Zürich, Schweiz, Goldauerstraße 23.
389. Herr Lehramtsprakt. OTTO EISENHUT.
390. „ Prof. Dr. G. J. ELIAS, Delft, Holland, van Leeuwenhoeksingel 27.
391. „ Prof. Dr. J. ELSTER, Wolfenbüttel, Neuerweg 61a.
392. „ Prof. Dr. R. EMDEN, München, Habsburgerstraße 4.
393. „ Leutn. d. R. MEDVECZKY ENDRE, Kassa, Ungarn, Erzsébat-tér 14.
394. „ cand. phil. R. ENGELS, Kiel, Kirchenstraße 3.
395. „ Dr. P. EPSTEIN, München, Krumbacherstraße 7.
396. „ Dr. WILH. ESCHER, Münster, Westf., Abschnittstraße 27.
397. „ Prof. Dr. A. EUCKEN, Breslau, Borsigstraße 23.
398. „ Prof. Dr. P. EVERSHEIM, Bonn, Jagdweg 3.
399. „ Dr. P. P. EWALD, Kiel, Wrangelstraße 48.
400. „ Prof. Dr. K. FAJANS, München, Prinzregentenstraße 54.
401. „ Dr. G. FALKENBERG, Rostock, Strandstraße 62.
402. „ stud. math. ANDOR FENYVESI, Budapest, Dalnok u. 2/C.
403. „ Prof. Dr. KARL T. FISCHER, München-Solln, Albrecht-Dürerstraße 1.
404. „ Dr. FR. FLADE, Marburg, Bez. Cassel, Zwischenhausen 8.
405. „ Dr. LUDWIG FLAMM, Wien VIII/2, Lerchenfelderstraße 122.
406. „ Ing. JOH. FLOREY, Gnaschwitz bei Bautzen, Post: Singwitz.
407. „ Dr. FÖRSTERLING, Danzig-Langfuhr, Techn. Hochschule.
408. „ Prof. Dr. PHILIPP FRANK, Prag II, Weinberggasse 3.
409. „ Prof. Dr. K. FREDENHAGEN, Leipzig, Ostplatz 5.
410. „ Dr. J. FRIEDLÄNDER, Zürich, Schweiz, Dolderstraße 90.
411. „ Prof. Dr. C. FROMME, Gießen, Bleichstraße 20.
412. „ Prof. Dr. CHR. FÜCHTBAUER, Leipzig, Linnéstraße 5.
413. „ Dr. REINHOLD FÜRTH, Prag II, Pořič 14.
414. „ Prof. Dr. W. GAEDE, Freiburg i. Br., Phys. Inst. d. Univ.
415. „ Prof. Dr. R. GANS, La Plata, Argentinien, Instituto de fisica.
416. „ Prof. Dr. H. GEITEL, Wolfenbüttel, Neuerweg 61a.
417. „ Prof. Dr. JOSEF Ritter VON GEITLER, Wien IV, Karlsgasse 18.
418. „ Dr. WALTER GERLACH, Elberfeld, Friedr. Bayer u. Co.
419. „ Dr. WERNER GERMERSHAUSEN, Leipzig, Eutritzscherstraße 14b.
420. „ Dr. KARL GLITSCHER, München, Schleißheimerstraße 43.
421. „ Dr. R. GLOCKER, Stuttgart, Kriegsbergstraße 13.
422. „ Dr. KONRAD GOES, Augsburg, Lessingstraße 39.
423. „ Prof. Dr. D. GOLDHAMMER, Kasan, Universität.
424. „ Dr. HANS GOLDSCHMIDT, Wien 1, Rotenturmstraße 29.
425. „ Prof. Dr. L. GRAETZ, München, Friedrichstraße 26.

426. Herr Prof. Dr. L. GREBE, Bonn, Loestraße 2.
427. „ Prof. Dr. HEINRICH GREINACHER, Zürich, Gladbachstraße 62.
428. „ Dr. G. GROSSMANN, Wien III, Apostelgasse 12 (Siemens & Halske).
429. „ Prof. Dr. O. GROTRIAN, Aachen, Vogelgasse 3.
430. „ Dr. WALTER GROTRIAN, Aachen, Vogelgasse 3.
431. „ Prof. Dr. PAUL GRUNER, Bern, Lindenrain 3.
432. „ Dr. S. GUGGENHEIMER, Nürnberg, Schoppershofstraße 52.
433. „ Prof. Dr. K. E. GUTHE, Ann Arbor, Mich., U.S.A., 725, New Jersey Av.
434. „ Prof. Dr. ARTHUR HAAS, Leipzig, Physik. Inst. d. Universität.
435. „ Prof. Dr. W. J. DE HAAS, Delft, Holland, Rotterdamschestraatweg 173.
436. „ Dr. med. FRITZ HAGEMANN, Plön, Holstein, Am Markt.
437. „ Prof. Dr. E. HAGEN, München-Solln 2, Terlanerstraße 21.
438. „ Prof. Dr. AUG. HAGENBACH-AMAN, Basel, Schönbeinstraße 38.
439. „ Prof. Dr. W. HALLWACHS, Dresden-A. 24, Phys. Institut.
440. „ Dr. W. HAMMER, Freiburg i. B., Im Grün 6.
441. „ Prof. E. A. HARRINGTON, Worcester, Mass., U.S.A., Clark University.
442. „ Dr. OTTOMAR HARTLEB, Hamburg 20, Ludolfstraße 42.
443. „ Prof. Dr. HARTMANN, Göttingen, Geismarlandstraße 15.
444. „ cand. phil. ALFRED HARTMANN, Aarau, Schweiz, Gartenstraße.
445. „ Dr. RUDOLF HASE, Hannover, Josephstraße 26.
446. „ Prof. Dr. GEORGES HATJIDAKIS, Piräus, Griechenland.
447. „ Oberlehrer Dr. ERICH HAUPT, Neustettin, Stellterstraße 10.
448. „ Dr. FRIEDRICH HAUSER, Erlangen, Glückstraße 3.
449. „ Prof. H. HAUSRATH, Karlsruhe, Kaiserstraße 12.
450. „ Dr. HEINRICH HECHT, Kiel, Signal-Ges., Habsburger Ring.
451. „ Prof. GEORG HEINRICH, Augsburg, Alexanderstraße 23.
452. „ Oberlehrer Dr. KARL HENRICH, Kiel, Feldstraße 65.
453. „ Prof. Dr. HERGESELL, Lindenberg, Kr. Beeskow, Aeron. Obs.
454. „ Prof. Dr. PAUL HERTZ, Göttingen, Riemannstraße 34.
455. „ Prof. Dr. J. HERWEG, Würzburg, Reibeltgasse $1^1/_2$.
456. „ Dr. OTTO HESS, Cassel, Kaiserplatz 31.
457. „ Dr. FRITZ HEUSLER, Isabellenhütte b. Dillenburg.
458. „ Prof. Dr. A. HEYDWEILLER, Rostock, Kaiser-Wilhelmstraße 2.
459. „ Dr. S. HILPERT, Mühlheim, Ruhr, Kaiser-Wilhelm-Institut.
460. „ Prof. Dr. F. HIMSTEDT, Freiburg i. B., Goethestraße 8.
461. „ Dr. RUD. Frhr. v. HIRSCH, Planegg b. München.
462. „ GEORG HIRZEL i. Fa. S. HIRZEL, Verlagsbuchh., Leipzig, Königstr. 2.
463. „ Dr. E. HOCHHEIM, Heidelberg-Schlierbach, Aue 10e.
464. „ Dr. HEINRICH HÖRIG, Stuttgart, Ludwig-Pfaustraße 19.
465. „ Prof. Dr. GERHARD HOFFMANN, Königsberg i. Pr. 9, Goltzallee 20.
466. „ Dr. H. HOLLNAGEL, Dorchester, Mass., U. S. A., Hamilton St. 186.
467. „ Dr. G. HOLTSMARK, Kristiania, Thomas-Heftgesgade 47.
468. „ Dr. LUDWIG HOPF, Nürnberg, Neutorgraben 7.
469. „ stud. phil. RUDOLF HUMM, Göttingen, Planckstraße 14.
470. „ Dr. ERICH HUPKA, z. Z. kriegsgefangen.
471. „ Prof. Dr. D. HURMUZESCU, Bukarest, Rumänien, 16 str. Cosma.
472. „ ANATOL IGNATIEFF, Kasan.
473. „ Dr. W. v. IGNATOWSKY.
474. „ Oberlehrer WERNER IMMLER, Elsfleth, Steinstraße 29a.
475. „ Prof. Dr. L. R. INGERSOLL, Madison, Wisc., U. S. A., Universität.

476. Herr SIM JANSS, Ütersen bei Hamburg.
477. „ Oberingenieur FRIEDR. JANUS, München, Nymphenburgerstraße 178.
478. „ Dr. F. JENTZSCH-GRAEFE, Gießen, Frankfurterstraße 34.
479. „ Prof. Dr. ALFRED KALÄHNE, Oliva b. Danzig, Jahnstr. 8.
480. „ Oberlehrer Dr. P. KALTENBACH, Rüstringen, Oldenburg, Schulstr. 97.
481. „ Prof. Dr. L. KANN, Wien XIX, Gymnasiumstraße 56.
482. „ WITOLD v. KASPEROWICZ, Zürich, Schweiz, Konradstraße 66.
483. „ Prof. Dr. W. KAUFMANN, Königsberg i. Pr. 6, Adalbertstraße 25.
484. „ Prof. Dr. H. KAYSER, Bonn, Humboldtstraße 2.
485. „ Prof. Dr. W. H. KEESOM, Utrecht, Willem Barentzstraat 47.
486. „ Dr. H. KELLNER, p. A. BAUSCH & LOMB, Opt. Co., Rochester, N.-Y., U.S.A.
487. „ Dr. J. J. KERN, Göttingen, Hainholzweg 12.
488. „ FRITZ KEUL, Hermannstadt, Ungarn, Schewisgasse 32.
489. „ LEO v. KLECKI, Warschau, Marszalkowskastraße 120.
490. „ Prof. Dr. F. KLEIN, Göttingen, Wilhelm-Weberstraße 3.
491. „ Dr. ALFONS KLEMENC, Wien IX, Wasagasse 9.
492. „ Dr. FR. KLINGELFUSS, Basel.
493. „ Prof. Dr. E. KLUPATHY, Budapest IV, Muzeum-körût 6/8, II. Phys. Inst.
494. „ Prof. Dr. OSC. KNOBLAUCH, München 4, Hiltensbergerstraße 36.
495. „ Dr. D. KNÜTTEL, Baarn b. Utrecht, Villa Diana.
496. „ Prof. Dr. JOHN KOCH, Göteborg, Schweden.
497. „ Prof. Dr. K. R. v. KOCH, Stuttgart, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule.
498. „ Dr. P. P. KOCH, München-Nymphenburg, Dall' Armistraße 32.
499. „ Dr. ADOLF KÖNIG, Karlsruhe, Techn. Hochschule.
500. „ Dr. PAUL PALLME KÖNIG, Steinschönau, Böhmen, Langegasse 154.
501. „ Prof. Dr. W. KÖNIG, Gießen, Hofmannstraße 11.
502. „ Prof. Dr. J. KOENIGSBERGER, Freiburg i. B., Erwinstraße 3.
503. „ Prof. Dr. W. KOHLRAUSCH, Hannover, Nienburgerstraße 8.
504. Frl. Dr. HEDWIG KOHN, Breslau 18, Phys. Inst. d. Univ., Kürassierstr. 5.
505. Herr Dr. KARL KOHNER, Budapest, Daganischgasse 20.
506. „ Dr. WERNER KOLHÖRSTER, Schwiebus, Hallerstadt 15.
507. „ Prof. Dr. H. KONEN, Münster i. W., Bohlweg 50.
508. „ Dr. WALTER KOSSEL, München 23, Gundelindenstr. 5.
509. „ Dr. HANS KOST, Elberfeld, Sadowastraße 9.
510. „ Dr. FR. KOTTLER, Wien III/1, Streichergasse 4.
511. „ Prof. Dr. J. v. KOWALSKI, Warschau.
512. „ Dr. KAMILL KRAFT, Krakau, Bonerstraße 5.
513. „ Dr. E. KRETSCHMANN, Königsberg i. Pr.-Amalienau, Adalbertstr. 15.
514. „ stud. phys. JOS. KRÖNERT, Fürth, Amalienstr. 29.
515. „ Prof. Dr. FRIEDRICH KRÜGER, Danzig-Langfuhr, Althofweg 5.
516. „ Prof. Dr. H. KRÜSS, Hamburg, Adolfsbrücke 7.
517. „ Dr. W. KUNZE, Bremen, Lützowstraße 68.
518. „ Prof. Dr. AYAO KUWAKI, Kyushu, Japan, Imperial University.
519. „ Prof. Dr. R. LADENBURG, Breslau 18, Menzelstraße 87.
520. „ Prof. Dr. ANTON LAMPA, Prag II 1594, Weinberggasse 3.
521. „ Dr. med. BRUNO LANDAU, Wandlitz, Mark.
522. „ Prof. Dr. V. VON LANG, Wien IX, Türkenstraße 3.
523. „ Prof. Dr. P. LASAREW, Moskau, Mertwyi Per. 20.
524. „ Prof. Dr. J. LAUB, Buenos Aires, Bogotá 3155.
525. „ Prof. Dr. M. v. LAUE, Frankfurt a. M. 1, Beethovenstraße 33.

526. Herr Prof. Dr. E. Lecher, Wien IX/1, Boltzmanngasse.
527. „ Prof. Dr. E. L. Lederer, Weinberge b. Prag, D. Staatsgymn.
528. „ Prof. Dr. O. Lehmann, Karlsruhe, Kaiserstraße 63.
529. „ Dr. Gotthelf Leimbach, Göttingen, Baurat-Gerberstraße 19.
530. „ Prof. Dr. R. Leiser, Wien VI, Mariahilferstr. 113.
531. „ Prof. Dr. G. Leithäuser, Hannover, Techn. Hochschule.
532. „ Dr. Ernst Leitz, Wetzlar.
533. „ Prof. Dr. Ph. Lenard, Heidelberg, Neuenheimerstraße 2.
534. „ Dr. Wilhelm Lenz, München, Inst. f. theor. Phys.
535. „ Georg Levinthal z. Z. Berlin W. 30, Barbarossaplatz 3.
536. „ Dr. Hugo Lichte, Kiel, Kleiststraße 24.
537. „ Prof. Dr. J. E. Lilienfeld, Leipzig, Mozartstraße 4.
538. „ Prof. Dr. C. v. Linde, München, Prinz-Ludwigshöhe 44.
539. „ Oberlehrer Dr. Ad. Lindemann, Hamburg 13, Hartungstraße 15.
540. „ Dr. J. Stephan van der Lingen, Kroonstad, Oranje, Box 59.
541. „ Prof. Dr. Fr. Linke, Frankfurt a. M. 1, Kettenhofweg 105.
542. „ Prof. Dr. Erwin Lohr, Brünn, z. Z. Wien VI, Theobaldgasse 5.
543. „ Prof. Dr. H. A. Lorentz, Haarlem, Zijlweg 76.
544. „ Prof. Richard Lorenz, Frankfurt a. M., Robert-Mayerstraße 1.
545. „ Dr. St. Loria, Manchester, Physik. Institut d. Univ.
546. Frl. Anne Sophie Lose, Freiburg i. B., Baslerstraße 19.
547. Herr Dr. Ramón G. Loyarte, La Plata, Argent., Physik. Institut.
548. „ Prof. Dr. P. Ludewig, Freiberg, Albertstr. 22, z. Z. Kiel, Reventlowallee 6.
549. „ Dr. Ernst Lübcke, Kiel, Feldstraße 123.
550. „ Prof. Dr. O. Lummer, Breslau, Göppertstraße 1.
551. „ Dr. Willi Luthe, Mittweida i. S., Wilhelmstraße 18.
552. „ Prof. Dr. Heinrich Mache, Wien, Techn. Hochschule.
553. „ Prof. Dr. K. Mack, Hohenheim bei Stuttgart.
554. „ Prof. Dr. E. Madelung.
555. „ Dr. L. Mandelstam.
556. „ Dr. Arthur March, Innsbruck, Bürgerstraße 13.
557. „ Prof. Dr. O. Martienssen, Kiel, Reventlowallee 15a.
558. „ Prof. Dr. E. Marx, Leipzig, Kaiser-Wilhelmstraße 79.
559. „ Prof. Dr. W. Matthies, Basel-Riehen, Griengasse 46.
560. „ Dr. Fritz Mayer, Villingen, Baden, Niederestraße 3.
561. „ cand. phys. Otto Mayer, München, Ainmillerstraße 26.
562. „ A. Meiner i. Fa. J. A. Barth, Verlagsbuchh. Leipzig, Dörrienstr. 16.
563. „ Dr. Karl W. Meissner, Zürich, Schweiz, Physik. Institut.
564. „ Prof. Dr. G. Melander, Helsingfors, Meteorol. Zentralanstalt.
565. „ Kap. z. S. a. D. A. Mensing, Weißenbr. v. Wald, b. Schalkau, Thür.
566. „ cand. phil. P. Metzner.
567. „ Prof. Dr. Edgar Meyer, Zürich, Schweiz, Rämistraße 69.
568. „ Prof. Dr. Georg Meyer, Freiburg i. B., Jacobistraße 50.
569. „ Prof. Dr. Stefan Meyer, Wien IX, Boltzmanngasse 3.
570. „ Prof. A. A. Michelson, Chicago, University, Ryerson Laboratory.
571. „ Prof. Dr. G. Mie, Halle a. S., Phys. Inst. d. Univ.
572. „ Dr. Friedrich Moeller, Hamburg-Fuhlsb., Fuhlsbüttelerdamm 137.
573. „ Dr. Alexander Müller, Zürich, Schweiz, Kurhausstraße 8.
574. „ Prof. A. J. M. Mulder, Amsterdam, Holland, Hobbemakade 51.
575. „ Prof. Dr. R. Nacken, Greifswald, Mineral. Institut.

576. Herr Prof. Hantaro Nagaoka, Tokyo, Science Coll., Imp. Univ.
577. „ Prof. Dr. Ladislaus Natanson, Krakau, Studencka 3.
578. „ Dr. Paul Neubert, Leipzig, Ferdinand-Rhodestraße 23.
579. „ Prof. Dr. C. Neumann, Leipzig, Querstraße 10/12.
580. „ Prof. Dr. A. Nippold, Bornstädt, Mark, Viktoriastr. 10.
581. „ Prof. Dr. Fritz Noether, Karlsruhe, Baden, Liebigstraße 27.
582. „ Dr. P. Nordmeyer, Bielefeld, Johannistal 14.
583. „ Dr. Arvid Odencrants, Uppsala, Järnbrogatan 2.
584. „ Prof. Dr. A. v. Oettingen, Leipzig, Mozartstraße 1.
585. „ Dr. E. Oosterhuis, Eindhoven, Holland, Villapark.
586. „ Dr. Rudolph Ortvay, Budapest, Danyanich u. 28 B.
587. „ Prof. Dr. C. W. Oseen, Uppsala, Universität.
588. „ Ing. H. Peickert, Kalkberge, Mark, Maienbergstraße 8.
589. „ Harald Perlitz, St. Petersburg, Liteiny Per. 55[41].
590. „ Prof. Dr. A. Pflüger, Bonn, Joachimstraße 5.
591. „ Prof. G. W. Pierce, Harvard-Univ., Cambridge, Mass., U. S. A.
592. „ Prof. Alfredo Pochettino, Sassari, Sardinien, Universität.
593. „ Dr. Theod. Pöschl, Prag, Dtsche. Techn. Hochschule.
594. „ Dr. Bela Pogany, Klausenburg, Physik. Institut der Universität.
595. „ Prof. Dr. Robert Pohl, Göttingen, Universität.
596. „ Sergius Popow, Tübingen, Physik. Institut der Universität.
597. „ Prof. Dr. Royal A. Porter, Syracuse, U. S. A., Universität.
598. „ Prof. Dr. A. Pospielow, Tomsk, West-Sibirien, Universität.
599. „ Prof. Dr. J. Precht, Hannover, Oeltzenstraße 1.
600. „ Prof. Dr. K. Prytz, Charlottenlund, Dänem., Lindegaards Tvaervej 1.
601. „ Prof. Dr. G. Quincke, Heidelberg, Bergstraße 41.
602. „ Dr. K. Rappenecker, Freiburg i. B., Röderstraße 16.
603. „ Dr. S. Ratnowsky, Küßnacht b. Zürich, Seestraße 159.
604. „ Prof. Dr. W. J. Raymond, Univ. of California, Berkeley, Cal., U. S. A.
605. „ Dr. Ernst Reiche, Breslau IX, Paulstraße 16/18.
606. „ Prof. Dr. R. Reiger, Erlangen, Raumerstraße 8.
607. „ Dr. Max Reinhold, Karlsruhe, Baden, Hübschstraße 44.
608. „ Dr. O. Reinkober, Danzig-Langfuhr, Brunshoferweg 17.
609. „ Dr. A. Reis, Karlsruhe, Inst. f. phys. Chem. d. Techn. Hochschule.
610. „ Dr. B. Reismann, Hattingen a. d. R., Realgymnasium.
611. „ Bodo Frhr. v. Reitzenstein, Perchtoldsdorf b. Wien, Lohnsteinstr.
612. „ Prof. Dr. F. Richarz, Marburg, Bez. Cassel.
613. „ Dr. phil. Paul Riebesell, Hamburg, Klosterallee 80.
614. „ Prof. Dr. Ernst Riesenfeld, Freiburg i. B., Immentalstraße 38.
615. „ Dr. Hans Rieth, Gießen, Stephanstraße 24.
616. „ Hofbuchhändler Ludwig Röhrscheid, Bonn, Am Hof 28.
617. „ Prof. Dr. W. C. Röntgen, München 8, Äußere Prinzregentenstraße 1.
618. „ Dr. E. Rohlf, Kiel, Sophienblatt 28 a.
619. „ Prof. Dr. M. v. Rohr, Jena, Moltkestraße 5.
620. „ Ing. Dr. J. Rosenthal, München, Bavariaring 10.
621. „ Dr. Franz Rother, Leipzig, Linnéstraße 5.
622. „ Prof. Dr. Viktor Rothmund, Prag II 1594, Weinberggasse 3.
623. „ Dr. A. Rubinowicz, München, Königinstraße 55.
624. „ Dr. ing. Rümelin, Laim b. München, von der Pfortenstraße 23.
625. „ Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Universität.

626. Herr Prof. Dr. F. Rusch, Tientsin, China, Chiti Techn. High Coll. Ho-Pei.
627. „ Prof. Dr. E. Rutherford, Manchester, Withington, 17 Wilmslow Road.
628. „ cand. phil. Gottlieb Saurer, Ringoldswil, Thunersee, Schweiz.
629. „ Dr. R. Schachenmeier, Karlsruhe, Baden, Haydnplatz 3.
630. „ Dr. Léon Schames, Frankfurt a. M., Wittelsbacherallee 7.
631. „ Hauptmann Schatte, St. Avold, Lothringen, Hamburgerstraße 89.
632. „ Prof. Dr. K. Schaum, Gießen, Bergstraße 5.
633. „ Prof. Dr. R. Schenck, Münster, Westf., Körnerstraße 4.
634. „ Prof. Dr. K. Schering, Darmstadt, Herdweg 86.
635. „ Dr. Paul Scherrer, Göttingen, Friedländerweg 3.
636. „ Reallehrer Rudolf Schleussinger, Weißenburg, Bayern.
637. „ Dr. Rudolf Schmid, Wien III/1, Beatrixgasse 14a.
638. „ Prof. Dr. Gerhard Schmidt, Münster i. W., Gertrudenstraße 12.
639. „ Priv.-Doz. Dr. Hans Schmidt, Kiel, z. Z. Altona, Palmallee 3.
640. „ Harry Schmidt, Altona, Elbe, Lessers Passage 6.
641. „ Prof. Dr. Karl Schmidt, Halle a. S., Kronprinzenstraße 1.
642. „ Dr. Rudolf Schmidt, Wien III/1, Beatrixgasse 14a.
643. „ Dr. Erwin Schrödinger, Wien I, Gluckstraße 3.
644. „ Dr. Karl Schütt, Hamburg 23, Wartenau 3.
645. „ Dipl.-Ing. Max Schuler, Neumühlen b. Kiel, Heikendorferweg 23.
646. „ Prof. Dr. F. A. Schulze, Marburg, Bez. Cassel, Wilhelmstraße 32½.
647. „ Prof. Dr. Egon Ritter v. Schweidler, Innsbruck, Universität.
648. „ Prof. Dr. A. Schweitzer, Zürich VI, Möbrlistraße 63.
649. „ Prof. Dr. M. Seddig, Würzburg, Pleicherring 11.
650. „ Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstraße 43/44.
651. „ Dr. H. Senftleben, Breslau, Lothringerstraße 4.
652. „ Dr. Karl Siebel, Kiel, Fleckenstraße 16.
653. „ Prof. Dr. Henry Siedentopf, Jena, Kaiser-Wilhelmstraße 7.
654. „ Dr. Manne Siegbahn, Lund, Schweden, Physik. Inst.
655. „ Prof. Dr. Bruno Sieger, Nürnberg, Äußere Ziegelgasse 18.
656. „ Dr. Otto Silberberg, Breslau, Hohenzollernstraße 63/65.
657. „ Prof. Dr. P. Silow, Kiew, Rußland, Nikolaistraße 9.
658. „ Dr. Martin Sjöström, Uppsala, Schweden, Universität.
659. „ H. Clyde Snook, Philadelphia, Pa. 417, Mariner & Merchant Building.
660. „ Prof. Dr. A. Sommerfeld, München 23, Leopoldstraße 87.
661. „ Dipl.-Ing. Stephan Spiegel, Budapest I, Zeimoriu 8.
662. „ Prof. Dr. P. Spies, Posen W. 3, Sachsenstraße 42.
663. „ Prof. Dr. Joh. Stark, Greifswald, Domstraße 10.
664. „ Prof. Dr. H. Starke, Aachen, Lütticherstraße 189.
665. „ Prof. Dr. R. Steinheil, München, Lipowskystraße 2.
666. „ Prof. Dr. K. Stöckl, Passau, Hochstraße 9.
667. „ Prof. Dr. R. Straubel, Jena, Botzstraße 10.
668. „ Prof. Dr. V. Strouhal, Prag, Clementinum.
669. „ Dr. Karl Stuchtey, Marburg, Bez. Cassel, Savignystraße 11.
670. Frl. W. Stücklen, Göttingen, Hainholzweg 20.
671. Herr Prof. Dr. Koloman Széll, Klausenburg, Ung., Reformiertes Kollegium.
672. „ Dr. Ernst Taege, Danzig-Langfuhr, Hauptstraße 91.
673. „ Prof. Dr. Emil Take, Marburg, Bez. Cassel, Renthofstraße 10.
674. „ Prof. A. H. H. Tallqvist, Helsingfors.
675. „ Dr. B. Tepelmann, Braunschweig, Viewegstraße 1.

676. Herr Prof. Dr. S. Tereschin, Petersburg, Nikolajewskaya 40.
677. „ cand. phys. G. Thilo, Breslau, Opitzstraße 16.
678. „ Dr. Hans Thirring, Wien II, Ausstellungsstraße 11.
679. „ Prof. Dr. Thöldte, Dessau, Askanische Straße 56.
680. „ Prof. Dr. M. Toepler, Dresden-A., Hohestraße 18.
681. „ Dr. A. Q. Tool, University of Nebraska, Lincoln, Nebraska.
682. „ Prof. Gymnasiallehrer Alfred Tóth, Pannonhalma, Ungarn.
683. „ Prof. Dr. M. Trautz, Heidelberg, Mönchhofstraße 4a.
684. „ Dr. Karl Tubandt, Halle a. S., Mozartstraße 20.
685. „ L. B. Tuckermann, Phys. Dept. Univ. of Nebraska, Lincoln, U. S. A.
686. „ Prof. Dr. W. von Uljanin, Kasan.
687. „ Dr. R. Ullrich, Frankfurt a. M., Luxemburgerallee 44.
688. „ Dr. Hans Usener, Kiel, Düvelsbekerweg 33.
689. „ Prof. Dr. S. Valentiner, Clausthal, Harz, Bergakademie.
690. „ G. Varga, Budapest VII, Erzsébet-körut 39.
691. „ Dr. L. Vegard, Kristiania, Phys. Institut d. Universität.
692. „ Prof. Dr. Henri Veillon, Basel, Eulerstraße 27.
693. „ Dr. H. Vogel, Haubinda bei Hildburghausen, Landes-Erz.-Haus.
694. „ Prof. Dr. W. Voigt, Göttingen, Grüner Weg 1.
695. „ Prof. Dr. P. Volkmann, Königsberg-Amalienau, Hardenbergstr. 8/10.
696. „ Prof. Dr. A. Voller, Hamburg, Physik. Staatslaboratorium.
697. „ Dr. Max Volmer, Leipzig, Universität.
698. „ Vladimir Vrkljan, Zágráb, Kroatien, Mesnickagasse 5.
699. „ Prof. Vykruta, Prag, Böhmen, Staatsgewerbeschule.
700. „ Prof. Dr. R. Wachsmuth, Frankfurt a. M., Kettenhofweg 136.
701. „ Prof. Dr. E. Waetzmann, z. Z. Charlottenburg 2, Herderstraße 12.
702. „ Dr. J. Wallot, Zellerfeld, Goslarschestraße 324.
703. „ Prof. Dr. B. Walter, Hamburg, Physik. Staatslaboratorium.
704. „ Prof. Dr. Anton Weber am Lyceum in Dillingen (Bayern).
705. „ Prof. Dr. H. Weber, Braunschweig, Spielmannstraße 21.
706. „ Prof. Dr. L. Weber, Kiel, Moltkestraße 60.
707. „ Prof. Dr. Rudolf H. Weber, Rostock, Wismarsche Straße 5.
708. „ Dr. Sophus Weber, Leiden, Holland, Hooge Rijndijk 52.
709. „ Dr. Moritz Weerth, Elberfeld, Roonstraße 35.
710. „ Prof. Dr. F. Weigert, Leipzig, Kronprinzenstraße 10.
711. „ cand. phil. Heinz Weinnoldt, Essen a. d. Ruhr, Bismarckstr. 42.
712. „ Dr. Alfred Wenzel, Brandenburg a. H., Fohrderstraße 43.
713. „ Dr. Raoul Wernicke, Buenos Aires, Argentinien.
714. „ Dr. Alfred Wertheimer, München, Sophienstraße 1a.
715. „ Eduard Wertheimer, Bielefeld, Detmolderstraße 17.
716. „ Dr. K. von Wesendonk, Bern.
717. „ Reinhard A. Wetzel, New York, College of the City of New York.
718. „ Dr. Whitney, Schenectady, U. S. A., General Electric Co.
719. „ Prof. Dr. E. Wiechert, Göttingen, Hainberg 180.
720. „ Prof. Dr. E. Wiedemann, Erlangen.
721. „ Dr. Gebhard Wiedmann, Dresden-A. 14, Phys. Inst. Techn. Hochsch.
722. „ Prof. Dr. M. Wien, Jena.
723. „ Prof. Dr. W. Wien, Würzburg, Pleicherring 8.
724. „ Prof. Dr. O. Wiener, Leipzig, Linnéstraße 4.
725. „ Dr. H. Wiesent, Augsburg, Hermannstraße 5.

726. Herr Prof. Dr. A. Wigand, Halle a. S., Kohlschütterstraße 9.
727. „ Dr. E. Wilke.
728. „ Prof. Dr. E. B. Wilson, Boston, Mass. U. S. A., Inst. of Technology.
729. „ Lehramtsass. Josef Wimmer, Oettingen, Bayern.
730. „ Prof. Dr. Max Winkelmann, Jena, St. Jacobstraße 20.
731. „ Prof. Dr. Hans Witte, Wolfenbüttel, Marktstraße 4.
732. „ Dr. M. v. Wogau, Ihringen, Baden.
733. „ Dr. M. Wolfke, Zürich VI, Tiefegäßchen 38.
734. „ Dr. A. Wratzke, Marburg, Bez. Cassel, Kirchspitze 1.
735. „ Prof. Dr. Joseph Würschmidt, Erlangen, Physik. Institut.
736. „ Prof. Dr. H. Zahn, Kiel.
737. „ Prof. Dr. L. Zehnder, Ruchfeld 78 bei Basel, Schweiz.
738. Carl Zeiss, Optische Werkstatt, Jena.
739. Herr Prof. Dr. H. Zickendraht, Basel, Türkheimerstraße 3.
740. „ Prof. Dr. W. Ziegler, Santiago de Chile, Cassilla 1389.
741. „ Dr. R. Zsigmondy, Göttingen, Friedländerweg 47.
742. Inst. f. theoret. Phys. (Prof. Sommerfeld), München 4, Univers.
743. Das Phys. Institut der Universität Frankfurt a. M.
744. Das Phys. Institut der Universität Freiburg i. B.
745. Das Phys. Institut der Universität Gießen.
746. Das Phys. Institut der Universität Göttingen.
747. Das Phys. Institut der Universität Jena.
748. Das Phys. Institut der Universität Leipzig, Linnéstraße 5.
749. Das Phys. Institut der Universität Marburg.
750. Das Phys. Institut der Technischen Hochschule Danzig-Langfuhr.
751. Das Phys. Institut der Technischen Hochschule Darmstadt.
752. Das Phys. Institut der Technischen Hochschule Dresden-A.
753. Das Phys.-Chem. Institut der Universität Leipzig, Linnéstraße 2.
754. Das Phys.-Chem. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe.
755. Das Phys. Laboratorium des Friedrichs-Polytechnikums Cöthen (Anhalt).
756. Polyteknisk Laereanstalt, fysiske Laboratorium, Kopenhagen.
757. Bibliothek der Universität Gießen.
758. Universitätsbibliothek Kiel.
759. Bibliothek der Bergakademie Freiberg i. S.
760. Landesbibliothek Stuttgart.
761. Bayerische Sternwarte, München.
762. Forstakademie, Eberswalde.
763. Luftschiffbau Zeppelin G. m. b. H., Friedrichshafen, Bodensee.

Alphabetisches Namenregister

zu

Jahrgang 20 (1918)

der

Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft[1].

[1] Die in Klammern bzw. ohne Klammern stehenden Zahlen weisen auf die Seiten hin, auf welchen ein kürzerer bzw. längerer Bericht über die betr. Mitteilung abgedruckt ist.

ie Rela
it als et
89.
Anlaß
).

erungs

rechung
Körp
n (1).

errun
Falle

Strom-
edenen

Eigen-

Auf-
r den

ndes

und

ns-
4),

d
st



